20. Dividir 1:280$ por A e B de sorte que a parte de A multiplicada por 7, seja igual a parte de B multiplicada por 9. Resp. ?

21. A differença de dois numeros é 20, e o quociente do maior dividido pelo menor é 3. Quaes são estes numeros? Resp. ?

Equações simultaneas contendo mais de duas incognitas

202. As equações que conteem mais de duas quantidades desconhecidas, podem ser resolvidas por qualquer dos tres methodos de eliminação que explicamos nos capitulos precedentes.

Quando ha mais de duas incognitas, é preferivel o methodo de reducção ao mesmo coefficiente, e é esse o que agora vamos empregar.

Problema. Achar os valores de x, y e z nas equações simultaneas:

$$\begin{aligned} (1^a)\quad & x+2y+z=20, \\ (2^a)\quad & 2x+y+3z=31, \\ (3^a)\quad & 3x+4y+2z=44. \end{aligned}$$

Solução. Multiplicando por 2 a 1ª equação para tornar o coefficiente de x igual ao coefficiente de x na 2ª equação, temos $2x+4y+2z=40$,
subtrahindo a 2ª equação $2x+y+3z=31$,
temos a 1ª resultante..... $3y-z=9$.

Multiplicando agora por 3 a 1ª equação para tornar o coefficiente de x igual ao coefficiente de x na 2ª equação,

temos.................... $3x+6y+3z=60$,
subtrahindo a 3ª equação $3x+4y+2z=44$,
temos a 2ª resultante..... $2y+z=16$.

Temos agora as duas equações resultantes que são

1ª resultante......... $3y-z=9$,
2ª resultante......... $2y+z=16$,
solução.............. $5y=25$, e $y=5$.

Sommando as duas equações resultantes, achamos que $y=5$; substituindo na 2ª resultante o termo de $2y$ por 10, achamos que $z=6$; substituindo na 1ª equação os termos $2y$ e z pelos valores $10+6=16$, achamos que $x=4$.

Regra. *Elimina-se uma quantidade desconhecida, combinando uma equação com outra; elimina-se ainda a mesma quantidade desconhecida por outra combinação; e as equações resultantes das duas combinações resolvem-se conforme a regra para duas incognitas.*

Achada uma incognita, as outras se obteem por deducção.

Resolver as seguintes equações simultaneas e os seguintes problemas:

1. $5x-3y+2z=38$, $3x+3y-4z=30$, $x+3y+4z=58$.

2. $2x+5y-3z=4$, $4x-3y+2z=9$, $5x+6y-2z=18$.

3. $2x+3y-4z=20$, $x-2y+3z=6$, $3x-2y+5z=26$.

4. $5x+2y+4z=46$, $3x+2y+z=23$, $10x+5y+4z=75$.

5. $x+y+z=53$, $x+2y+3z=105$, $x+3y+4z=134$.

6. $3x+4z=43$, $2y-z=5$, $5x+3y=43$.

7. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=62$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=47$, $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{6}=38$.

8. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{7}=22$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{2}=31$, $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=32$.

1. Um homem tem tres filhos; a somma das idades do primeiro e do segundo é 27 annos; a somma das idades do primeiro e terceiro é 29, e a do segundo e terceiro é 32. Qual é a idade de cada filho? Resp. 12 annos, 15 e 17.

2. A somma de tres numeros é 59; $\frac{1}{2}$ da differença entre o primeiro e segundo é 5, e $\frac{1}{2}$ da differença entre o primeiro e o terceiro é 9; requer-se achar os tres numeros. Resp. 29, 19 e 11.

3. Achar tres numeros taes que o primeiro com $\frac{1}{3}$ dos outros dois, o segundo com $\frac{1}{4}$ dos outros dois, e o terceiro com $\frac{1}{5}$ dos outros dois seja cada somma igual a 25. Resp. 13, 17 e 19.

4. Um menino comprou em uma vez 4 bananas e 5 laranjas por 280 réis; em outra, 6 bananas e 4 pecegos por 360 réis, e em outra, 9 laranjas 8 pecegos por 840 réis. Qual é o preço de cada fructa?
Resp. Bananas 20 réis, laranjas 40 réis e pecegos 60 réis.

5. Tres pessoas, A, B e C tinham 2:000$000; se A désse 200$ a B, então B teria 100$ mais do que C; mas se B désse 100$ a A, então B teria só $\frac{3}{4}$ do dinheiro de C; requer-se a quantia que cada um possuia. Resp. A 500$, B 700$ e C 800$.

6. Tres batalhões teem 1905 soldados: $\frac{1}{2}$ do primeiro batalhão com $\frac{1}{3}$ do segundo tem 60 soldados menos do que tem o terceiro batalhão; e $\frac{1}{2}$ do terceiro com $\frac{1}{3}$ do primeiro tem 165 soldados menos do que o segundo batalhão. Qual é o numero de cada um?
Resp. 1° batalhão 630, 2° 675 e 3° 600.

Problemas indeterminados

203. Um problema póde ser determinado ou indeterminado: é **determinado** quando offerece tantas equações ou condições differentes quantas são as suas incognitas ou quantidades desconhecidas. Tem esta denominação, porque a sua resposta é determinada e definida, e não admitte nenhuma outra.

Um problema é **indeterminado** quando offerece menos equações do que incognitas. E' assim denominado, porque não tem uma só resposta, como os problemas determinados, mas admitte um numero illimitado de soluções ou respostas.

204. Se um problema offerece mais equações do que incognitas, empregam-se sómente as equações necessarias para a solução, e desprezam-se as excedentes; e deste modo, o problema ficará determinado, como vemos no exemplo seguinte:

Problema. Achar dois numeros cuja somma seja 8, a differença 2, e o producto 15.

Solução. Seja x um dos numeros, e y o outro. Neste problema temos só duas incognitas e tres equações. Somando as duas primeiras equações, temos $x=5$, e, por conseguinte, $y=8-5=3$. A outra equação que é $xy=15$, embora seja exacta, porque $5\times3=15$, foi desnecessaria para a solução, pois não tivemos precisão della para achar o valor das duas incognitas.

$$\begin{array}{rl} x+y=\ 8 & (1^a) \\ x-y=\ 2 & (2^a) \\ \hline 2x\quad=10 & \\ x\quad=\ 5. & \end{array}$$

Para os alumnos não acharem difficuldade alguma no ensino dos problemas indeterminados, vamos primeiro distinguir as equações independentes das equações derivadas.

205. Na solução de um problema de duas equações simultaneas, quando queremos eliminar uma das incognitas, operamos com equações independentes e com equações derivadas.

Equações independentes são as que teem a sua origem no enunciado de um problema, e exprimem alguma condição nelle estabelecida; assim as equações

$$x+3y=21,$$
$$2x+5y=37$$

são duas equações independentes, porque não sendo uma derivada da outra, só em alguma condição do problema pódem ter a sua origem.

Equações derivadas são as que se formam das equações independentes por meio de uma addição, subtracção, multiplicação ou divisão. Assim as duas equações

$$(1^a)\quad x+2y=16,$$
$$(2^a)\quad 2x+4y=32,$$

a primeira é independente, e a segunda é derivada, porque é o resultado da primeira multiplicada por 2.

A segunda equação portanto, não envolve condição alguma que não esteja formulada na primeira, nem com ella poderemos eliminar qualquer incognita da primeira equação; pois se multiplicarmos por 2 todos os termos da primeira, e depois subtrahirmos uma de outra para a eliminação, o resultado será nullo como poderemos verificar.

$$\begin{array}{ll} 2x+4y=32, & (1^a \text{ multiplicada por } 2) \\ 2x+4y=32, & (2^a) \\ \hline 0\quad 0\quad 0. & \end{array}$$

206. Para podermos portanto eliminar uma incognita de duas equações simultaneas, é necessario que essas equações sejam independentes ou derivadas de duas equações independentes.

207. Se nos derem um problema que estabeleça uma só equação com duas incognitas, como, por exemplo: $x-y=8$, este problema terá forçosamente uma solução indeterminada; pois transformando os seus membros, temos $x=8+y$. Ora fazendo $y=1$, x será igual a 9; fazendo $y=2$, x será igual a 10, e assim por diante como vemos na serie que está ao lado. Podemos tambem organizar uma outra serie fraccionaria, e neste caso, fazendo $y=1\frac{1}{2}$, x será igual a $9\frac{1}{2}$; fazendo $y=2\frac{1}{2}$, x será igual a $10\frac{1}{2}$ e assim por diante; de modo que poderiamos formar series interminaveis de soluções ou respostas deste problema.

$$\begin{array}{c} x-y=8 \\ 9-1=8 \\ 10-2=8 \\ 11-3=8 \\ 12-4=8 \\ 13-5=8 \\ 14-6=8 \\ 15-7=8 \\ \text{Etc.} \end{array}$$

208. Se nos derem duas equações contendo tres incognitas, como

$$\begin{array}{ll} (1^a) & x+3y+5z=41, \\ (2^a) & x+2y+3z=28, \\ \hline & \quad y+2z=13. \end{array}$$

podemos eliminar a incognita x subtrahindo a segunda equação, da primeira, mas o resultado será tambem indeterminado, porque apresenta uma só equação com duas incognitas: $y+2z=13$.

Transpondo os termos desta equação, temos $x=13-2z$. Ora, se fizermos $z=1$, $2z=2$, e y será igual a 11; se fizermos $z=2$, $2z=4$, e y será igual a 9, e assim por diante, como vemos na serie que está ao lado.

$$\begin{aligned} y+2z&=13\\ 11+2\ \ &=13\\ 9+4\ \ &=13\\ 7+6\ \ &=13\\ 5+8\ \ &=13\\ 3+10&=13\\ 1+12&=13. \end{aligned}$$

Se nas duas equações acima subtrahirmos as incognitas y e z pelos diversos valores que ellas teem na serie, acharemos que x poderá ter os valores 3, 4, 5, 6, 7, ou 8, conforme os valores da serie, que substituirem y e z; e deste modo a solução fica igualmente indeterminada. Portanto,

209. *Quando o numero das quantidades desconhecidas excede ao numero das equações independentes, o problema é indeterminado.*

210. Podemos obter uma solução ou resposta para um problema indeterminado, pelo seguinte processo:

Problema. Comprei 20 aves por 20$000, sendo gallinhas a 1$000, perús a 4$000, e frangos a $200; quantas aves comprei de cada preço?

Solução. Seja $x=$ ao numero das gallinhas; $y=$ ao numero dos perús, e $z=$ ao numero dos frangos. Então,

a 1ª equação é $1000x+4000y+200z=20000$,
a 2ª equação é $x+\ y+\ z=\ 20$.

Nota-se logo á primeira vista que este problema é indeterminado, porque apresenta tres incognitas, más offerece sómente duas equações.

Simplificando a primeira equação, dividindo-a por 200, temos $5x+20y+z=100$,
subtrahindo della a segunda equação.................... $x+\ y+z=\ 20$,
temos a equação resultante.............................. $4x+19y=\ 80$.

Fazendo agora $x=1$ que é o menor numero inteiro e positivo, temos $4x=4$, $19y=80-4=76$, e $y=76\div19=4$. Ora, sendo $x=1$ e $y=4$, segue-se que $z=20-1-4=15$, porque os tres numeros devem sommar 20. Então,

$x=$ 1 gallinha....................	1$000,
$y=$ 4 perús a 4$000..............	16$000,
$z=$ 15 frangos a $200..............	3$000,
20 aves por....................	20$000.

Este problema tem outras soluções ou respostas, mas como apresentam quantidades fraccionarias, não se prestam para este caso que requer sómente numeros inteiros. Uma dessas soluções é 1 perú, 15¼ gallinhas e 3¾ frangos. Nesta solu-

DEMONSTRAÇÕES ALGEBRICAS

211. Todas as demonstrações que temos apresentado até aqui, são simplesmente demonstrações arithmeticas, baseadas em raciocinios sobre quantidades particulares, e que estão ao alcance até das intelligencias infantis.

As demonstrações propriamente *algebricas* não podem ser apresentadas aos alumnos senão depois que elles sabem operar com facilidade e precisão os diversos processos de uma equação do primeiro grau; antes disso, é muito difficil, se não impossivel, que elles comprehendam com clareza uma demonstração exposta, por meio de um processo, que se transforma completamente em cada operação que se effectua, e que só póde ser comprehendido por aquelles que conhecem o encadeamento inteiro desse trabalho.

Como os alumnos já aprenderam a operar os processos necessarios para resolver qualquer equação do primeiro grau, estão agora no caso de comprehender facilmente como se demonstram algebricamente os enunciados, regras e theoremas da Algebra e da Arithmetica, e de avaliar como são exactos e engenhosos os raciocinios desta demonstração.

Vamos dar agora a demonstração algebrica de alguns theoremas e enunciados algebricos, começando pelos mais simples e faceis de comprehender, para que o alumno não ache difficuldade alguma no encadeamento destes raciocinios.

*

212. Theorema. Se multiplicarmos ou dividirmos ambos os termos de uma fracção por um mesmo numero, mudaremos a fórma, mas não alteraremos o valor da fracção. (Vêde n.° **147**).

Demonstração algebrica. Seja $\frac{a}{b}$ a fracção, e q o seu valor; temos portanto $\frac{a}{b}=q$. (1ª equação).

$$\frac{a}{b}=q \qquad (1^a)$$
$$a=bq \qquad (2^a)$$
$$am=bqm \qquad (3^a)$$
$$\frac{am}{bm}=\frac{bqm}{bm} \qquad (4^a)$$
$$\frac{am}{bm}=q \qquad (5^a)$$

Na fracção $\frac{a}{b}$, a é o dividendo, b é o divisor, e o valor da fracção é o quociente representado por q. Ora, como o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente, segue-se que $a=bq$. Multiplicando ambos os membros desta equação por m, temos $am=bqm$. Dividindo agora os dois membros desta equação por bm, temos a 4ª equação. Cancellando no segundo membro desta equação os factores b e m que são communs ao numerador e denominador (n.° **164**), resta

podemos eliminar a incognita x subtrahindo a segunda equação, da primeira, mas o resultado será tambem indeterminado, porque apresenta uma só equação com duas incognitas: $y+2z=13$.

Transpondo os termos desta equação, temos $x=13-2z$. Ora, se fizermos $z=1$, $2z=2$, e y será igual a 11; se fizermos $z=2$, $2z=4$, e y será igual a 9, e assim por diante, como vemos na serie que está ao lado.

Se nas duas equações acima subtrahirmos as incognitas y e z pelos diversos valores que ellas teem na serie, acharemos que x poderá ter os valores 3, 4, 5, 6, 7, ou 8, conforme os valores da serie, que substituirem y e z; e deste modo a solução fica igualmente indeterminada. Portanto,

$$\begin{aligned} y+2z&=13\\ 11+2&=13\\ 9+4&=13\\ 7+6&=13\\ 5+8&=13\\ 3+10&=13\\ 1+12&=13. \end{aligned}$$

209. *Quando o numero das quantidades desconhecidas excede ao numero das equações independentes, o problema é indeterminado.*

210. Podemos obter uma solução ou resposta para um problema indeterminado, pelo seguinte processo:

Problema. Comprei 20 aves por 20$000, sendo gallinhas a 1$000, perús a 4$000, e frangos a $200; quantas aves comprei de cada preço?

Solução. Seja $x=$ ao numero das gallinhas; $y=$ ao numero dos perús, e $z=$ ao numero dos frangos. Então,

a 1ª equação é $1000x+4000y+200z=20000$,
a 2ª equação é $x+y+z=20$.

Nota-se logo á primeira vista que este problema é indeterminado, porque apresenta tres incognitas, más offerece sómente duas equações.

Simplificando a primeira equação, dividindo-a por 200, temos $5x+20y+z=100$,
subtrahindo della a segunda equação.................. $x+y+z=20$,
temos a equação resultante.................. $4x+19y=80$.

Fazendo agora $x=1$ que é o menor numero inteiro e positivo, temos $4x=4$, $19y=80-4=76$, e $y=76\div19=4$. Ora, sendo $x=1$ e $y=4$, segue-se que $z=20-1-4=15$, porque os tres numeros devem sommar 20. Então,

$x=1$ gallinha..................	1$000,
$y=4$ perús a 4$000..............	16$000,
$z=15$ frangos a $200..............	3$000,
20 aves por..................	20$000.

Este problema tem outras soluções ou respostas, mas como apresentam quantidades fraccionarias, não se prestam para este caso que requer sómente numeros inteiros. Uma dessas soluções é 1 perú, $15\frac{1}{4}$ gallinhas e $3\frac{3}{4}$ frangos. Nesta solução, temos tambem $1+15\frac{1}{4}+3\frac{3}{4}=20$ unidades, na importancia de 4$000 + 15$250 + $750 = 20$000.

DEMONSTRAÇÕES ALGEBRICAS

211. Todas as demonstrações que temos apresentado até aqui, são simplesmente demonstrações arithmeticas, baseadas em raciocinios sobre quantidades particulares, e que estão ao alcance até das intelligencias infantis.

As demonstrações propriamente *algebricas* não podem ser apresentadas aos alumnos senão depois que elles sabem operar com facilidade e precisão os diversos processos de uma equação do primeiro grau; antes disso, é muito difficil, se não impossivel, que elles comprehendam com clareza uma demonstração exposta, por meio de um processo, que se transforma completamente em cada operação que se effectua, e que só póde ser comprehendido por aquelles que conhecem o encadeamento inteiro desse trabalho.

Como os alumnos já aprenderam a operar os processos necessarios para resolver qualquer equação do primeiro grau, estão agora no caso de comprehender facilmente como se demonstram algebricamente os enunciados, regras e theoremas da Algebra e da Arithmetica, e de avaliar como são exactos e engenhosos os raciocinios desta demonstração.

Vamos dar agora a demonstração algebrica de alguns theoremas e enunciados algebricos, começando pelos mais simples e faceis de comprehender, para que o alumno não ache difficuldade alguma no encadeamento destes raciocinios.

*

212. Theorema. Se multiplicarmos ou dividirmos ambos os termos de uma fracção por um mesmo numero, mudaremos a fórma, mas não alteraremos o valor da fracção. (Vêde n.º **147**).

Demonstração algebrica. Seja $\frac{a}{b}$ a fracção, e q o seu valor; temos portanto $\frac{a}{b}=q$. (1ª equação).

Na fracção $\frac{a}{b}$, a é o dividendo, b é o divisor, e o valor da fracção é o quociente representado por q. Ora, como o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente, segue-se que $a=bq$. Multiplicando ambos os membros desta equação por m, temos $am=bqm$. Dividindo agora os dois membros desta equação por bm, temos a 4ª equação. Cancellando no segundo membro desta equação os factores b e m que são communs ao numerador e denominador (n.º **164**), resta q, isto é, $\frac{am}{bm}=q$. Este resultado mostra que a fracção $\frac{a}{b}$, tendo ambos os termos multiplicados por m, não fica com o valor alterado, porque se conserva igual a q.

$$\frac{a}{b}=q \quad (1^a)$$
$$a=bq \quad (2^a)$$
$$am=bqm \quad (3^a)$$
$$\frac{am}{bm}=\frac{bqm}{bm} \quad (4^a)$$
$$\frac{am}{bm}=q. \quad (5^a)$$

Ficou pois demonstrado que $\frac{am}{bm}$ é igual a q; agora, em sentido inverso, se dividirmos ambos os termos da fracção $\frac{am}{bm}$ por m, ella ficará $\frac{a}{b}$; e como $\frac{a}{b}$ é igual a q, segue-se que *o valor de uma fracção não se altera, quando multiplicamos ou dividimos ambos os seus termos pela mesma quantidade.*

*

213. Theorema. Se a mesma quantidade for addicionada a ambos os termos de uma fracção propria, a nova fracção resultante será maior do que a primeira; mas se a mesma quantidade for addicionada a ambos os termos de uma fracção impropria, a fracção resultante será menor do que a primeira.

Demonstração. Seja $\frac{a}{b}$ a fracção propria, e m a quantidade que se addiciona a cada um de seus termos; então a fracção resultante será $\frac{a+m}{b+m}$.

Reduzindo agora as duas fracções $\frac{a}{b}$ e $\frac{a+m}{b+m}$ ao mesmo denominador (n.º 156), para determinar qual dellas é a maior, teremos

$$\frac{a}{b}=\frac{ab+am}{b^2+bm} \quad \text{e} \quad \frac{a+m}{b+m}=\frac{ab+bm}{b^2+bm}.$$

Desde que o denominador é o mesmo em ambas as fracções, a fracção maior será a que tiver maior numerador. Se $\frac{a}{b}$ for fracção propria, a deverá ser menor do que b, e am menor do que bm, e por conseguinte, $ab+am$ menor do que $ab+bm$, isto é, a fracção resultante será a maior do que a primeira.

Se $\frac{a}{b}$ for fracção impropria, é evidente que $ab+am>ab+bm$, isto é, a fracção resultante será menor do que a primeira.

*

214. Theorema. Se um numero dividir o dividendo e o divisor, dividirá tambem o resto, se o houver.

Demonstração. A demonstração deste theorema baseia-se nos dois principios seguintes:

1º *A differença entre duas quantidades inteiras deve ser uma quantidade inteira.*

2º *O quociente de uma divisão exacta deve ser um numero inteiro.*

Seja pois ad o dividendo, bd o divisor, q o quociente e r o resto da divisão. Vamos demonstrar que d dividindo ad e bd, dividirá tambem r.

Como o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente e mais o resto, temos $ad=bdq+r$ (1ª equação). Mudando o lugar do r para tornal-o mais saliente, temos a 2ª equação. Dividindo os termos desta equação por d, temos a 3ª equação. Cancellando agora nos dois termos do segundo membro o factor d que é commum ao numerador e ao denominador, temos $\frac{r}{d}=a-bq$. Esta ultima equação mostra-nos a differença de dois nume-

$$ad=bdq+r \quad (1^a)$$
$$r=ad-bdq \quad (2^a)$$
$$\frac{r}{d}=\frac{ad}{d}-\frac{bdq}{d} \quad (3^a)$$
$$\frac{r}{d}=a-bq \quad (4^a)$$

ros inteiros, que deve ser um numero inteiro, como o quociente da divisão de r por d. Ora se o quociente é inteiro a divisão é exacta, e r é então divisivel por d. Portanto, *se um numero dividir o dividendo e o divisor, dividirá tambem o resto se o houver.*

*

215. Theorema. O numero que dividir dois outros numeros, dividirá tambem a differença que houver entre elles.

Demonstração. Sejam a e b os dois numeros, e d o divisor de ambos, então como d divide a e b, dividirá tambem $a-b$ que é a sua differença.

Se d divide exactamente a e b, os quocientes q e q' hão de ser necessariamente numeros inteiros.

Desde que $a=dq$ e $b=dq'$ segue-se que $a-b=dq-dq'$, (1ª equação). Dividindo agora todos os termos desta equação por d, temos a 2ª equação. Cancellando agora nos dois termos do segundo membro desta equação, o factor d que é commum ao numerador e ao denominador, temos a 3ª equação. Ora, como q e q' são numeros inteiros, a sua differença tambem deve ser um numero inteiro, e se o quociente de $\frac{a-b}{d}$ é um numero inteiro, mostra que a divisão é exacta, e que a differença $a-b$ é divisivel por d. Portanto, *o numero que dividir dois outros numeros, dividirá tambem a differença que houver entre elles.*

$$\frac{a}{d}=q \text{ ou } a=dq$$
$$\frac{b}{d}=q' \text{ ou } b=dq'$$
$$a-b=dq-dq' \quad (1^a)$$
$$\frac{a-b}{d}=\frac{dq}{d}-\frac{dq'}{d} \quad (2^a)$$
$$\frac{a-b}{d}=q-q' \quad (3^a)$$

Base das regras das quatro operações sobre fracções

*

216. Sommar. Demonstrar que $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}$.

Demonstração. Em Algebra bem como em Arithmetica, as fracções devem ter um denominador commum para se poder operar a addição e subtracção. As fracções $\frac{a}{b}$ e $\frac{b}{a}$, reduzidas ao mesmo denominador ficam $\frac{a^2}{ab}$ e $\frac{b^2}{ab}$. (Vêde n.º 156).

Seja pois $\frac{a^2}{ab}=m$, e $\frac{b^2}{ab}=n$.

Então $a^2+b^2=abm+abn$, 1ª equação. Dividindo todos os termos desta equação por ab, temos a 2ª equação. Cancellando agora nos termos do segundo membro os factores a e b que são communs ao numerador e ao denominador, temos a 3ª equação que apresenta a somma de $m+n$, valores das duas fracções, igual a $\frac{a^2+b^2}{ab}$. Daqui concluimos que, *para se sommar fracções reduzem-se a um denominador commum, e escreve-se a somma dos numeradores sobre elle* (n.º 160).

$$\frac{a^2}{ab}=m \;\therefore\; a^2=abm$$
$$\frac{b^2}{ab}=n \;\therefore\; b^2=abn$$
$$a^2+b^2=abm+abn \quad (1^a)$$
$$\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{abm}{ab}+\frac{abn}{ab} \quad (2^a)$$
$$\frac{a^2+b^2}{ab}=m+n. \quad (3^a)$$

*

217. Subtrahir. Demonstrar que $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$.

Demonstração. As fracções $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ reduzidas ao mesmo denominador, ficam $\frac{ad}{bd}$ e $\frac{bc}{bd}$.

Seja $\frac{ad}{bd}=m$, e $\frac{bc}{bd}=n$. Então temos $ad=bdm$, e $bc=bdn$ ou $ad-bc=bdm-bdn$, 1ª equação. Dividindo todos os termos desta equação por bd temos a 2ª equação. Cancellando os factores communs ao segundo membro, temos a 3ª equação, que mostra que a differença entre m e n, que são os valores das duas fracções, é igual a $\frac{ad-bc}{bd}$. Daqui concluimos que *para se subtrahir uma fracção de outra, reduzem-se ambas a um denominador commum e escreve-se sobre elle a differença dos numeradores* (n.º 161).

$$\frac{ad}{bd}=m \therefore ad=bdm$$
$$\frac{bc}{bd}=n \therefore bc=bdn$$
$$ad=bdm, \text{ e } bc=bdn$$
$$ad-bc=bdm-bdn \quad (1^a)$$
$$\frac{ad-bc}{bdd}=\frac{bdm}{bd}-\frac{bdn}{bd} \quad (2^a)$$
$$\frac{a-bc}{bd}=m-n. \quad (3^a)$$

*

218. Multiplicar. Demonstrar que $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

Demonstração. Seja $\frac{a}{b}=m$, e $\frac{c}{d}=n$. Então temos $a=bm$, e $c=dm$, ou $ac=bmdn$, 1ª equação. Dividindo os termos desta equação por bd, temos a 2ª equação. Cancellando agora os factores b e d que são communs ao numerador e ao denominador, temos a 3ª equação que mostra que o producto de m e n, que são os valores das duas fracções, é igual a $\frac{ac}{bd}$. Daqui concluimos que *para se achar o producto de duas fracções, multiplicam-se entre si os numeradores, e o mesmo se faz com os denominadores, e a fracção resultante será o producto* (n.º 163).

$$a=bm, \text{ e } c=dm$$
$$a\times c=bm\times dn$$
$$ac=bmdn \quad (1^a)$$
$$\frac{ac}{bd}=\frac{bmdn}{bd} \quad (2^a)$$
$$\frac{ac}{bd}=mn. \quad (3^a)$$

*

219. Dividir. Demonstrar que $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

Demonstração. Seja $\frac{a}{b}=m$, e $\frac{c}{d}=n$; Então temos $a=bm$, e $c=dn$, ou dividindo um pelo outro $\frac{a}{c}=\frac{bm}{dn}$.

Multiplicando agora ambos os membros desta equação por $\frac{d}{b}$, temos a 2ª equação. Concellando no segundo membro os factores b e d que são communs ao numerador e ao denominador, temos a 3ª equação que mostra que a divisão de m por n que são os valores das duas fracções, é igual a $\frac{ad}{bc}$. Ora este quociente é composto do dividendo $\frac{a}{b}$ e do divisor $\frac{c}{d}$ com os termos invertidos $\frac{d}{c}$. Daqui concluimos que *para se dividir uma fracção por outra, invertem-se os termos do divisor, e multiplicam-se as duas fracções* (n.º 166)

$$a=bm, \text{ e } c=dn$$
$$\frac{a}{c}=\frac{bm}{dn} \quad (1^a)$$
$$\frac{a\times d}{c\times b}=\frac{bm\times d}{dn\times b} \quad (2^a)$$
$$\frac{ad}{bc}=\frac{m}{n}. \quad (3^a)$$

*

220. Uma equação do primeiro grau com uma só quantidade desconhecida terá uma só raiz, isto é, um só valor ou resposta que póde verificar a equação (n.º 179).

Demonstração. Seja $x=$ a quantidade desconhecida; $a=$ a somma dos coefficientes positivos de x; e $-c=$ a somma dos coefficientes negativos; seja tambem $b=$ a somma das quantidades conhecidas que são positivas, e $-d=$ a somma das que são negativas. Então temos o resultado que está ao lado. Fazendo agora $b-d=n$, e $a-c=m$, temos $x=\frac{n}{m}$. Ora, desde que n dividido por m não pode ter senão um quociente, segue-se que *uma equação do primeiro grau com uma só incognita, não póde ter senão uma raiz.*

$$ax-cx=b-d$$
$$x(a-c)=b-d$$
$$x=\frac{b-d}{a-c}.$$

Nota. Os exemplos que acabamos de expôr, habilitarão os alumnos a comprehender, sem difficuldade as outras demonstrações algebricas que apresentaremos no desenvolvimento desta obra.

GENERALIZAÇÃO

221. Quando as quantidades conhecidas de um problema algebrico são representadas por lettras, estas quantidades chamam-se **valores geraes**, porque o resultado da solução apresenta um modo geral de resolver todos os problemas da mesma especie. **Generalizar um problema** é pois substituir os seus valores particulares ou dados por valores geraes representados por lettras, para que o valor da incognita seja expresso em uma fórmula algebrica.

222. Fórmula é o valor da incognita de um problema generalizado, expresso em linguagem algebrica, e que serve de regra geral para resolver problemas semelhantes que apenas differem no valor particular de seus dados.

223. Regra é a traducção de uma fórmula algebrica feita em linguagem commum. Assim a fórmula $\frac{ab}{a+b}$, traduzida ou expressa em linguagem commum, quer dizer: *O producto de* **a** *multiplicado por* **b** *dividido pela somma de* **a** *mais* **b**.

Vamos agora resolver alguns problemas generalizados para elucidar com clareza este ponto.

Primeiro caso da generalização

224. Problema. A somma de dois numeros é 68, e a sua differença é 20; quaes são os numeros?

Solução. Seja x o numero maior, e $x-20$ o numero menor. Pelas condições do problema, o numero maior é 44, e o menor é 24.

$$x+x-20=68$$
$$2x=88$$
$$x=44$$
$$x-20=24.$$

Se tivessemos de resolver agora muitos problemas desta natu reza, em cada um delles teriamos de estabelecer identica equação e repetir o mesmo trabalho da solução.

Generalizando porém, este problema, obtemos uma fórmula que resolverá facilmente todos os problemas da mesma natureza.

Generalizemos pois este problema:

A somma de dois numeros é **s**, *e sua differença é* **d**; *quaes são os numeros?*

Solução. Seja x o numero maior, e $x-d$ o numero menor. Temos então a equação $x+x-d=s$. Resolvida a equação, vemos que o numero maior é $\frac{s+d}{2}$, e o numero menor é $\frac{s-d}{2}$.

$$x+x-d=s$$
$$x+x=s+d$$
$$2x=s+d$$
$$x=\frac{s+d}{2}$$
$$x-d=\frac{s-d}{2}.$$

A solução deste problema generalizado apresenta duas fórmulas: uma é $\frac{s+d}{2}$, a outra é $\frac{s-d}{2}$.

Estas duas fórmulas estabelecem a seguinte regra da Arithmetica:

Para acharmos dois numeros, quando sabemos a sua somma e a sua differença, ajuntaremos a metade da somma com a metade da differença, e teremos o numero maior; e subtrahiremos da metade da somma a metade da differença, e teremos o numero menor.

Appliquemos agora estas fórmulas na solução dos seguintes problemas:

1. A somma de dois numeros é 100, e a sua differença é 6; quaes são os numeros?

Solução. Se substituirmos nas duas fórmulas as lettras s e d pelos seus respectivos valores, teremos:

$$\frac{s+d}{2}=\frac{100+6}{2}=53 \text{ numero maior,}$$

$$\frac{s-d}{2}=\frac{100-6}{2}=47 \text{ numero menor.}$$

2. Dois numeros sommam 44, e a sua differença é 6; quaes são os numeros? Resp. 25 e 19.

3. A somma das idades de um pai e seu filho é 85 annos; a differença destas idades é 21 annos; quaes são as suas idades? Resp. 53 e 32.

4. Dois batalhões teem 1550 soldados; a differença de numero entre um e outro batalhão é 70; quantos soldados teem cada batalhão? Resp. 810 e 740.

Segundo caso de generalização

225. Problema. Qual é o numero que sendo dividido por 3 e por 5, a somma destes quocientes é 16?

Solução. Seja x o numero requerido. Resolvida a equação, vemos que o valor de x é 30.

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=16$$
$$5x+3x=240$$
$$x=30.$$

Generalizemos agora este problema:

Qual é o numero que, sendo dividido por **a** *e por* **b**, *a somma dos dois quocientes é* **c**?

Solução. Seja x o numero requerido; a equação será então $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c$. Resolvida a equação, temos $x=\frac{abc}{b+a}$, isto é, o producto dos tres dados divididos pela somma dos dois divisores.

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c$$
$$bx+ax=abc$$
$$x(b+a)=abc$$
$$x=\frac{abc}{b+a}.$$

A solução deste problema dá a fórmula que resolve todos os problemas desta natureza.

Appliquemos esta fórmula na solução dos seguintes problemas:

1. Achar um numero que dividido por 3 e por 7, a somma destes quocientes seja 20.

Solução. Substituindo na fórmula acima as lettras a, b e c pelos seus respectivos valores, temos:

$$\frac{abc}{b+a}=\frac{3\times 7\times 20}{3+7}=\frac{420}{10}=42.$$

2. Qual é o numero que dividido successivamente por 4 e por 5, a somma destes quocientes é 45. Resp. 100.

3. Achar um numero que dividido successivamente por 5 e por 6, a differença destes quocientes seja 2?

Solução. Neste problema, como é dada a differença entre quocientes em vez da somma, a fórmula deverá conter tambem a differença entre os divisores.

$$\frac{abc}{b-a}=\frac{5\times 6\times 2}{6-5}=\frac{60}{1}=60.$$

Terceiro caso de generalização

226. Problema. Uma lebre foge de um cão que a persegue a 60 metros de distancia; o cão corre 40 metros por minuto, e a lebre corre 36; em quantos minutos o cão alcançará a lebre?

Solução. Seja x o numero de minutos. O cão andando 40 metros por minutos, em x minutos anda $40x$. Por identica razão a lebre anda $36x$.

Para o cão alcançar a lebre, é necessario que elle vença os $36x$ que anda a lebre, e ainda os 60 metros que o separam della. Pelas condições do problema, a equação deve ser $40x=36x+60$. Resolvida a equação, vemos que o numero de minutos requerido é 15.

$$40x=36x+60$$
$$40x-36x=60$$
$$4x=60$$
$$x=15.$$

Generalizemos este problema, substituindo as quantidades particulares 60, 40 e 36, pelas quantidades geraes a, m e n.

Solução. Temos a equação $mx=nx+a$; resolvida esta equação, temos a fórmula $\frac{a}{m-n}$ que resolve todos os problemas desta natureza, e que, traduzida em linguagem commum, quer dizer:

A distancia dividida pela differença das velocidades, dá o tempo requerido.

$$mx=nx+a$$
$$mx-nx=a$$
$$x(m-n)=a$$
$$x=\frac{a}{m-n}.$$

Appliquemos esta fórmula na solução dos seguintes problemas:

1. Do porto do Rio de Janeiro sahiu um vapor navegando 12 milhas por hora; quando já tinha alcançado a distancia de 72 milhas, sahiu do mesmo porto outro vapor no mesmo rumo, navegando 16 milhas por hora; em quantas horas o ultimo vapor alcançou o primeiro?

Solução. $\frac{a}{m-n}=\frac{72}{16-12}=\frac{72}{4}=18$ horas.

2. Um gavião vendo uma pomba que estava a 80 metros de distancia delle, voou para alcançal-a; no mesmo instante a pomba fugiu do gavião; ora voando o gavião em cada minuto mais 8 metros do que a pomba, em quantos minutos a alcançaria?

Solução. $\frac{a}{m-n}=\frac{80}{8}=10$ minutos.

3. Entre dois viajantes que seguem a mesma direcção pela mesma estrada, ha uma distancia de 56 kilometros; o que vai na frente anda 6 kilometros por hora, e o outro 10; em quantas horas este alcançará aquelle?

Solução. $\frac{a}{m-n}=\frac{56}{10-6}=\frac{56}{4}=14$ horas.

Quarto caso de generalização

227. Problema. Um homem póde fazer um trabalho em 8 dias; outro o póde fazer em 12 dias; trabalhando juntos, em quantos dias o poderão fazer?

Solução. Seja x o numero de dias requerido; como um homem faz o trabalho em 8 dias, em um dia fará $\frac{1}{8}$ do trabalho, e em x dias fará $\frac{x}{8}$. Por semelhante razão, o outro homem fará $\frac{x}{12}$. Ora como ambos fazem o trabalho, que é 1 inteiro, segue-se que a equação deve ser $\frac{x}{8}+\frac{x}{12}=1$, que dá $4\frac{4}{5}$ dias.

$$\frac{x}{8}+\frac{x}{12}=1$$
$$3x+2x=24$$
$$5x=24$$
$$x=4\frac{4}{5}.$$

Generalizando agora este problema, substituindo os valores particulares 8 e 12 pelos valores geraes a e b, temos a equação ao lado que, resolvida, nos dá a fórmula $\frac{ab}{a+b}$ que resolve todos os problemas desta natureza.

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$$
$$ax+bx=ab$$
$$x(a+b)=ab$$
$$x=\frac{ab}{a+b}.$$

Appliquemos esta fórmula na solução dos seguintes problemas:

1. Um tanque tem duas torneiras, uma o enche em 6 horas, e a outra em 9 horas; abrindo-se as duas torneiras, em quantas horas o tanque ficará cheio?

Solução. $\frac{ab}{a+b}=\frac{6\times 9}{6+9}=\frac{54}{15}=3\frac{3}{5}$ horas.

2. Uma vacca póde comer um sacco de farelo em 7 dias, e um boi póde comel-o em 5 dias; em quantos dias o poderão comer ambos?

Solução. $\frac{ab}{a+b}=\frac{7\times 5}{7+5}=?$ Resp. $2\frac{11}{12}$.

3. A. póde fazer uma obra em 10 dias, B. póde fazel-a em 20 dias; em quantos dias a poderão fazer os dois trabalhando juntos? Resp. $6\frac{2}{3}$.

Nota. Poderiamos apresentar ainda muitos outros casos de generalização, estes porém são sufficientes, para nos mostrar que as mais importantes regras da Arithmetica são baseadas nas fórmulas obtidas na solução dos problemas generalizados.

FÓRMAS DA SOLUÇÃO

228. O resultado da solução de um problema póde apparecer com uma das seis fórmas seguintes denominadas:

1ª *Solução positiva*,	4ª *Solução zero*,
2ª *Solução negativa*,	5ª *Solução indeterminada*,
3ª *Solução infinita*,	6ª *Solução absurda*.

Consideremos cada uma destas soluções separadamente.

Solução positiva

229. Solução positiva é aquella que temos obtido em todos os problemas resolvidos até esta pagina. A solução positiva dá á incognita um valor exacto e positivo que satisfaz perfeitamente todas as condições do problema, como podemos reconhecer por meio de uma verificação. (Sec. 177).

Se algumas vezes a incognita e o seu respectivo valor apparecem com o signal negativo, como: $-x=-4$, isto provém da inversão na ordem dos membros da equação; mas este resultado se corrige facilmente, e a solução se torna positiva, mudando a ordem dos termos da solução, como: $4=x$, ou mudando os signaes de ambos os termos, como: $x=4$. Nestas mudanças o valor da equação não soffre alteração alguma, como ficou exposto na secção n.º 182, *Regra*. (Vêde n.º 191, VIII Prob.)

Esta é a solução natural que os discipulos já conhecem, porque a teem obtido em todos os problemas já resolvidos, e por isso não precisam de mais esclarecimentos sobre ella.

Passemos pois, ás outras soluções que ainda são desconhecidas.

Solução negativa

230. Já vimos na secção n.º 11 que, quando uma quantidade não tem signal algum, subentende-se o signal positivo $+$, e que todas as quantidades são consideradas positivas, se não forem de outro modo designadas. Do mesmo modo, o valor da incognita é considerado positivo, quando a incognita tambem o é. Assim $x=8$ quer dizer $+x=+8$.

231. Algumas vezes, porém, acontece que, na solução de um problema, a incognita tem o signal positivo subentendido, e o seu valor apparece com o signal negativo, como $x=-4$. A este resultado dá-se o nome de **solução negativa**.

Exemplifiquemos este caso com o seguinte problema: *Em um armazem ha um certo numero de saccas de café; o triplo desse numero menos 100 é igual a quatro vezes o seu numero mais 200; qual é o numero de saccas?*

Solução. Seja x o numero das saccas; então temos a seguinte

equação	$4x+200=3x-100$,
transpondo	$4x-3x=-100-200$,
reduzindo	$x=-300$.

O resultado $x=-300$, ainda que satisfaça a questão no sentido algebrico, não a satisfaz no sentido arithmetico, porque em um armazem não póde haver -300 saccas de café. Essa solução mostra pois que ha algum defeito ou engano no enunciado, ou então se dá uma interpretação errada ao problema. Estes erros podem ser facilmente corrigidos.

Neste problema, o engano está na troca dos signaes, pois em lugar de $+200$, e -100, deve ser -200, e $+100$. Corrigindo assim este problema, a equação será $4x-200=3x+100$, e $x=300$, isto é, a solução positiva.

232. Problema. *A idade de um pai é 40 annos, e a de seu filho é 13, em que epocha a idade do pai é o quadruplo da idade do filho?*

Solução. Seja x o numero que falta para chegar a epocha requerida. Então a equação será $4(13+x)=40+x$. Resolvida a equação, temos $x=-4$.

Este resultado negativo nos mostra que ha algum engano a corrigir. Pela simples leitura deste problema, fomos levados a julgar erradamente que essa relação de idades se effectuaria em uma epocha posterior aos 40 annos do pai, e não antes.

Se o enunciado dissesse: « *Em que epocha a idade do pai foi o quadruplo da idade do filho?* » logo comprehenderiamos que era em uma epocha anterior aos 40 annos, e teriamos formulado a 2ª equação, cujo resultado mostra que a epocha requerida no problema, foi quando o pai tinha $40-4=36$ annos, e o filho $13-4=9$.

N[illegible] solução vemos que a falta de clareza no problema, levou-nos a uma interpretação errada, do que fomos logo advertidos pela solução negativa $x=-4$.

1ª Equação

$$4(13+x)=(40+x)$$
$$52+4x=40+x$$
$$3x=-12$$
$$x=-4.$$

2ª Equação

$$4(13-x)=(40-x)$$
$$52-4x=40-x$$
$$-3x=-12$$
$$x=4.$$

233. Os exemplos que temos apresentado, fundamentam os dois seguintes principios:

1º *Uma solução negativa indica em geral alguma troca de signaes ou outro defeito no enunciado do problema.*

2º *Quando se obtem uma solução negativa, o enunciado do problema póde ser corrigido trocando-se os signaes ou modificando-se o sentido que se lhe deu; de sorte que a solução exprima exactamente o valor da incognita no sentido positivo.*

Solução infinita

234. A palavra *infinito* tem diversos sentidos, conforme a accepção em que é tomada. Em Algebra, ella tem uma significação particular que não póde ser facilmente comprehendida senão depois de termos uma ideia clara da materia da sua applicação. E' pois conveniente estudarmos primeiro o caso em que este termo é applicado, para depois comprehendermos facilmente a definição que se lhe dá no sentido algebrico.

235. Quando os dois termos de uma fracção qualquer são quantidades finitas e determinadas, a fracção deverá ter tambem um valor finito e determinado. Assim o valor da fracção $\frac{a}{b}$ é o quociente de a dividido por b. Mas se um ou ambos os termos desta fracção forem substituidos por zeros, os quocientes ou resultados serão

$$\frac{a}{0}, \quad \frac{0}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{0}{0}.$$

Examinemos separadamente cada uma destas expressões algebricas, para vermos o valor ou significação que devem ter.

236. Uma fracção algebrica é uma divisão, e em uma divisão, é evidente que, quanto menor for o divisor, tanto maior será o quociente.

Se na fracção $\frac{a}{b}$, o dividendo for constante, e o divisor for diminuindo de valor, o quociente irá crescendo sempre á medida que o divisor for diminuindo. Se o divisor for reduzido a um decimo, a um centesimo ou a um millesimo do seu valor, o quociente se tornará dez, cem ou mil vezes maior.

Se o divisor b for reduzido a um millionesimo, o quociente se tornará um milhão de vezes maior, porque $\frac{a}{0{,}000001} = 1000000\,a$ ou um milhão de vezes o valor de a; se o divisor se tornar ainda menor, o quociente se tornará ainda maior. De modo que, se o divisor se tornar a menor quantidade assignalavel, isto é, o menor de todos os numeros, o quociente se tornará a maior quantidade assignalavel, isto é, o maior de todos os numeros. E se o divisor descer a zero, limite sem valor algum, o quociente tocará no extremo opposto que é o *infinito*, e se tornará uma *quantidade infinita*.

237. Para se exprimir em Algebra este quociente, emprega-se o symbolo ∞ que se chama *infinito*.

De sorte que $\frac{a}{0} = \infty$ lê-se: *A quantidade* **a** *dividida por zero é igual ao infinito.*

Em Algebra pois, uma quantidade infinita quer dizer: *uma grandeza maior do que qualquer outra grandeza assignalavel da mesma especie.*

238. Na solução de um problema, quando o valor da incognita apparece com a formula de $\frac{a}{0} = \infty$, devemos entender por esta expressão algebrica que não ha valor algum finito que satisfaça as condições do problema, isto é, não ha numero algum que multiplicado por zero, dê um producto igual a quantidade a; por este motivo, esta solução se denomina **solução infinita** ou mais propriamente **solução impossivel,** porque é exactamente esta ideia que ella exprime.

Nota. No capitulo denominado *Discussão dos problemas* veremos este caso exemplificado, bem como os casos das outras soluções.

Solução zero

239. Se na fracção $\frac{a}{b}$, o denominador b for constante, e o numerador a for diminuido de valor, o quociente ou valor da fracção irá tambem diminuindo. Assim as fracções $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$ e $\frac{1}{6}$ teem um denominador igual, mas porque o numerador vai diminuindo de valor, cada uma destas fracções é menor que a precedente.

Portanto, se o numerador a diminuir de valor, e se tornar o menor dos numeros, o valor da fracção diminuirá do mesmo modo; e finalmente se o numerador descer a zero, a fracção $\frac{a}{b}$ ficará reduzida tambem a zero e se exprimirá: $\frac{0}{b} = 0$, que se lê: *Zero dividido pela quantidade* **b** *é igual a zero.*

240. Quando pois o resultado da solução de um problema apparece com a forma $\frac{0}{b}$, chama-se **solução zero,** e quer dizer que não ha necessidade de quantidade alguma para satisfazer as condições do problema, e por isso a resposta é zero.

Solução indeterminada

241. Se na fracção $\frac{a}{b}$ ambos os termos forem substituidos por zeros, o resultado será $\frac{0}{0}$. Ora, zero dividido por zero, não tem em Arithmetica significação alguma, mas em Algebra, tem uma significação importante que deve ser perfeitamente conhecida.

242. Quando o valor da incognita em uma equação do primeiro grau apparece com a forma $\frac{0}{0}$, mostra que qualquer quantidade

póde satisfazer as condições do problema. O resultado $\frac{0}{0}$ chama-se **solução indeterminada**, porque exprime uma quantidade indeterminada, isto é, um numero qualquer.

243. Em uma divisão, o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente; ora, desde que qualquer numero, multiplicado pelo divisor zero, dá um producto igual ao dividendo zero $(0=0\times x)$, segue-se que o symbolo $\frac{0}{0}$ exprime uma quantidade qualquer.

244. Algumas vezes o valor da incognita apresenta-se com a fórma indeterminada $\frac{0}{0}$, sem comtudo o ser, como vemos no exemplo seguinte:

$$x=\frac{a^2-16}{a-4}.$$

Se dermos a quantidade a o valor de 4, a^2 será 16, e então teremos

$$x=\frac{a^2-16}{a-4}=\frac{16-16}{4-4}=\frac{0}{0}.$$

Mas se simplificarmos a fracção, supprimindo o factor $(a-4)$ que é commum ao numerador e ao denominador, teremos o seguinte resultado:

$$x=\frac{a^2-16}{a-4}=\frac{(a-4)\ (a+4)}{a-4}=a+4.$$

Ora como demos a a o valor de 4, segue-se que o resultado desta equação é $4+4=8$, e não $\frac{0}{0}$ como acima obtivemos.

Podemos evitar facilmente este engano, se, antes de darmos a solução por concluida, reduzirmos o valor da incognita á sua expressão mais simples, supprimindo os factores communs ao numerador e ao denominador. (Vêde n.º **151**.)

245. Na solução de alguns problemas, obtem-se uma outra fórma que tambem exprime uma quantidade indeterminada. Essa fórma é $0=0$, que se lê: *Zero igual a zero.*

Vamos resolver um problema que nós dará a fórma $0=0$.

Problema. Ha um numero cujo $\frac{1}{3}$ mais $\frac{1}{6}$ dão uma somma igual a $\frac{1}{2}$ do mesmo numero; qual é esse numero?

Solução. Seja x o numero. Então temos $\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=\frac{x}{2}$,

inteirando $2x+x=3x$,

transpondo $2x+x-3x=0$,

reduzindo $0=0$.

O resultado $0=0$ mostra que qualquer numero satisfaz as condições do problema. E isto é evidente, porque $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ são iguaes a $\frac{1}{2}$; ora qualquer numero tem $\frac{1}{2}$ igual a outro $\frac{1}{2}$, isto é, uma metade igual a outra metade.

246. Quando a fórma $\frac{0}{0}$ ou $0=0$ apparece como o resultado da solução algebrica de um problema, quer dizer que a **solução é indeterminada.**

Solução absurda

247. Uma equação é uma traducção fiel de um enunciado de um problema; o que o problema diz em linguagem commum, a equação exprime com clareza em linguagem algebrica, por isso quando os dados de um problema são exactos, e as condições razoaveis, a solução dá não só o valor da incognita, mas attesta tambem a verdade exposta no enunciado. Mas assim como uma equação traduz fielmente qualquer verdade ou exactidão de um problema, traduz egualmente qualquer absurdo ou disparate que elle contenha.

248. Quando pois ha algum absurdo nos dados ou nas condições de um problema, esse dislate apparece com toda a clareza no resultado final da equação, que dá o valor da incognita.

Exemplifiquemos este ponto com o seguinte problema: *Qual é o numero cujos $\frac{7}{12}$ menos 5 inteiros são iguaes á differença que ha entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{6}$ do mesmo numero e mais 7?*

Solução. Seja x o numero. Então temos $\frac{7x}{12}-5=\frac{3x}{4}-\frac{x}{6}+7$,

inteirando $7x-60=9x-2x+84$,

transpondo $7x+2x-9x=84+60$,

reduzindo $0=144$.

O erro ou dislate apparece claramente no resultado da solução $0=144$; ora é um absurdo affirmar que zero é igual a 144 unidades, e por isso este resultado tem o nome de **solução absurda.**

Não havendo engano algum no processo da solução, o absurdo não póde partir senão do enunciado do problema. E com effeito, se examinarmos as condições propostas veremos logo a sua disparidade, porque a differença entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{6}$ é $\frac{7}{12}$; ora $\frac{7}{12}-5$ não póde ser igual a $\frac{7}{12}+7$, como affirma o problema.

Quando pois, pela simples leitura de um problema, não podermos perceber o absurdo que elle enuncia, o resultado da solução o mostrará com clareza.

249. Se dermos á lettra n um valor qualquer, teremos a seguinte tabella resumida das expressões algebricas das diversas soluções:

Solução positiva,	$x=n$	Solução zero,	$x=\frac{0}{n}$
Solução negativa,	$x=-n$	Solução indeterminada,	$x=\frac{0}{0}$
Solução infinita,	$x=\frac{n}{0}=\infty$	Solução absurda,	$0=n$.

DISCUSSÃO DOS PROBLEMAS

250. Quando um problema se apresenta generalizado, isto é, quando suas quantidades conhecidas estão representadas por lettras (nº. **221**), podemos indagar quaes serão os diversos resultados da solução desse problema, se attribuirmos a essas quantidades valores particulares ou imaginarios.

251. Discutir um problema é attribuir valores particulares ás suas quantidades generalizadas, e depois interpretar os seus resultados.

A discussão do seguinte problema nos dará o esclarecimento necessario para comprehendermos devidamente este ponto:

Problema. *Dois correios partiram ao mesmo tempo de dois logares A e B que distam* ***a*** *milhas um do outro; seguindo ambos a mesma direcção, um andava* ***m*** *milhas por hora, e o outro* ***n*** *milhas; em quantas horas um alcançou o outro?*

Solução. Ha muitos modos de resolver este problema, aqui daremos o mais facil.

Seja x o numero de horas requerido; como um correio anda m milhas por hora, em x horas, elle andará mx; por semelhante razão, o outro correio andará nx. Como ignoramos os valores de m e n, supponhamos que $m>n$.

O correio que anda mx, para alcançar o outro, tem de vencer a distancia a, e ainda a distancia nx que o outro correio anda. A equação deve ser portanto, $mx=nx+a$, e o resultado, $x=\frac{a}{m-n}$.

Equação

$$mx=nx+a$$
$$mx-nx=a$$
$$x(m-n)=a$$
$$x=\frac{a}{m-n}.$$

252. Discussão do problema. A resposta que é o numero de horas requerido no problema, apparece com a fórma $\frac{a}{m-n}$, o

que quer dizer que a distancia a dividida pela differença entre m e n, que são as distancias que andam os correios cada hora, dá o numero de horas em que elles devem ficar juntos.

Ora a solução $\frac{a}{m-n}$ póde ter cinco resultados ou fórmas diversas, segundo os valores que attribuirmos as lettras a, m e n.

1ª Fórma. Supponhamos que as tres quantidades a, m e n sejam positivas e que m seja maior do que n, neste caso o numero de horas requerido no problema será uma quantidade positiva, porque sendo $m>n$, a differença entre estas duas quantidades será positiva; e a quantidade a dividida por um divisor positivo, dará um quociente positivo (n.º **86**).

Ora, isto é evidente das circumstancias do problema, porque se o correio que vai atraz, anda mais veloz do que o que vai adiante, é claro que a distancia que os separa, irá diminuindo, e no fim de certo numero de horas, essa distancia desapparecerá, e elles ficarão juntos. Poderemos fazer esta verificação com valores particulares. Se dermos ás lettras a, m e n os valores 20, 8 e 4, teremos o seguinte resultado:

$$x=\frac{a}{m-n}=\frac{20}{8-4}=\frac{20}{4}=5 \text{ horas.}$$

Isto quer dizer que se a distancia que separa os correios for 20 milhas, e um andar 8 milhas por hora, e outro 4, elles estarão juntos no fim de 5 horas. Nesta supposição a **solução** é **positiva.**

2ª Fórma. Supponhamos agora que m seja menor do que n, neste caso, o valor de x será negativo, porque, sendo n maior do que m, o resultado de $m-n$ será negativo, e a quantidade a dividida por $m-n$ dará um quociente negativo (n.º **86**).

Poderemos verificar facilmente este resultado por meio de algarismos. Como n é maior do que m, daremos a m o valor de 4, e a n o valor de 8. Então,

$$x=\frac{a}{m-n}=\frac{20}{4-8}=\frac{20}{-4}=-5, \text{ isto é, } x=-5.$$

Ora quando o valor da incognita apparece negativo, mostra que ha no problema algum defeito que deve ser corrigido. Nesta supposição dos valores, o defeito é evidente, porque se o correio que vai adiante, anda mais veloz do que o que vai atraz, é claro que este nunca poderá alcançar aquelle para ambos ficarem juntos; e quanto mais caminharem, maior será a distancia que os separa. Neste caso a **solução** é **negativa**, e mostra que o problema deve ser modificado para ter uma solução positiva.

Pela simples leitura do problema, comprehendemos que os dois correios seguiam a direcção :

$m \ldots\ldots\ldots n \ldots\ldots\ldots \longrightarrow$

mas o problema não dizendo qual delles ia adiante ou atraz, não nos auctoriza a pensar assim, e por isso podemos modificar o sentido da direcção fazendo-os seguir em caminho opposto :

$\longleftarrow \ldots\ldots\ldots m \ldots\ldots\ldots n$

e deste modo a solução se tornará positiva, porque sendo $n>m$, a differença $(n-m)$ será positiva, e a quantidade a dividida por um divisor positivo dará um quociente positivo (n.° **86**).

3ª Fórma. Supponhamos que m seja igual a n, isto é, que os dois correios andem com igual velocidade, neste caso, o numero de horas, que é o valor da incognita, será infinito, porque sendo $m=n$, então $\frac{a}{m-n}=\frac{a}{0}=\infty$, isto é, será igual ao infinito como já demonstramos nas secções **236** e **237**.

Nesta supposição dos valores do problema, a **solução é infinita**, e não póde ser outra, porque se os dois correios estão separados por uma certa distancia, e andam na mesma direcção, e com igual velocidade, é certo que nunca poderão ficar juntos, pois, por mais que caminhem, conservarão sempre a mesma distancia que os separa.

Em linguagem mathematica, diz-se que os dois correios ficarão juntos *a uma distancia infinita do ponto da partida.* Mas esta expressão quer simplesmente dizer em linguagem commum, que elles nunca se encontrarão, ou que é impossivel encontrarem-se. São desta natureza todos os casos que, em Algebra, apresentam uma solução infinita.

4ª Fórma. Supponhamos ainda que a seja zero, isto quer dizer que não haja distancia alguma entre os dois correios, neste caso, o numero de horas requerido será tambem zero, porque a solução $x=\frac{a}{m-n}$ será igual a $\frac{0}{m-n}$, e nós já demonstramos que zero dividido por uma quantidade qualquer, é igual a zero. (n.° **239**).

Ora este resultado é evidente na solução, porque se não ha distancia alguma entre os dois correios, é porque elles estão juntos, e se estão juntos, não ha necessidade de tempo algum para se juntarem. Nesta supposição dos valores, a **solução é zero.**

5ª Fórma. Supponhamos finalmente que a seja zero e m igual a n, neste caso, o numero de horas requerido será indeterminado, porque a solução $\frac{a}{m-n}$ será igual a $\frac{0}{0}$, symbolo que significa uma quantidade indeterminada, como já demonstramos (n.° **242**).

Este resultado é evidente das condições que suppomos no problema, porque se os dois correios estão juntos e caminham com igual velocidade, é certo que, desde a partida, elles estarão juntos na primeira hora de caminho, na segunda, na terceira e em todo o tempo que caminharem nestas condições; por isso qualquer numero de horas satisfará as condições do problema. Esta **solução** é **indeterminada.**

Vemos pois, que, attribuindo-se ás quantidades generalizadas a, m e n deste problema valores particulares ou imaginarios, as fórmas da solução teem um resultado completamente distincto.

253. Para fazermos apparecer a solução indeterminada com a forma $0=0$, vamos resolver o seguinte problema :

Tres pessoas A, B e C teem as seguintes idades : a idade de B é 6 annos menor do que a de A, e 4 annos maior do que a de C ; e $\frac{1}{3}$ da idade de A mais $\frac{1}{4}$ da idade de C são iguaes a $\frac{7}{12}$ da idade de B e mais 1. Quaes são as idades destas pessoas ?

Solução. Seja x a idade de A, $x-6$ a idade de B, e $x-6-4$ a idade de C.

$$\text{Então, } \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}(x-10)=\frac{7}{12}(x-6)+1,$$

$$\text{ou } \frac{x}{3}+\frac{x}{4}-\frac{10}{4}=\frac{7x}{12}-\frac{42}{12}+1,$$

$$\text{inteirando } 4x+3x-30=7x-42+12,$$

$$\text{transpondo } 4x+3x-7x=-42+12+30,$$

$$\text{reduzindo } 0=0.$$

O resultado $0=0$ mostra que a solução é indeterminada, e por isso qualquer numero satisfará as condições do problema. A expressão $\frac{1}{5}x$ quer dizer $\frac{1}{5}$ de x ou $\frac{x}{5}$.

Tomemos agora ao acaso o numero 20, para a idade de A, afim de vermos se elle satisfaz as condições do problema. A idade de A sendo 20 annos, a de B será $20-6=14$, e a de C $20-6-4=10$. As condições do problema são as seguintes :

$$\frac{1}{3} \text{ de } 20+\frac{1}{4} \text{ de } 10=\frac{7}{12} \text{ de } 14+1, \text{ ou}$$

$$\frac{20}{3}+\frac{10}{4}=\frac{98}{12}+1 \text{ ou } \frac{110}{12}=\frac{110}{12}.$$

A identidade desta equação mostra que o numero 20 satisfaz as condições do problema, e o mesmo succederá com qualquer outro numero.

DESIGUALDADE

254. Desigualdade algebrica é uma expressão que apresenta duas quantidades unidas pelo signal $>$ ou $<$ sendo uma dellas maior do que a outra, como:

(1° Membro) (2° Membro)

$$3+5 > 7-2$$

A desigualdade significa o inverso da igualdade. O termo ou termos que vão antes do signal, formam o primeiro membro da desigualdade, e os que vão depois, formam o segundo membro. (Vêde n.° 168.)

Na discussão dos problemas, muitas vezes é necessario comparar quantidades desiguaes para determinar os valores das quantidades desconhecidas, e estabelecer certas relações entre ellas.

255. Duas ou mais desigualdades estão no mesmo sentido, quando em todas ellas o primeiro membro é maior do que o segundo, ou quando em todas, o segundo membro é maior do que o primeiro. Assim, as desigualdades $15>12$, $7>5$ e $4>1$ estão no mesmo sentido; e as desigualdades $5<8$, $9<11$ e $13<15$ estão tambem no mesmo sentido.

Duas desigualdades estão em **sentido contrario,** quando em uma dellas o primeiro membro é maior do que o segundo, e na outra, o segundo membro é maior do que o primeiro, como $15>12$ e $11<14$.

256. Para notarmos com mais clareza a differença entre os valores positivos e negativos expressos em uma desigualdade, observaremos a seguinte escala descendente que mostra a relação de valores dependentes do signal que affecta uma quantidade:

(Numeros positivos) (Numeros negativos)

$$+5,\ +4,\ +3,\ +2,\ +1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5.$$

Visto que esta escala é descendente, notamos nella os tres seguintes factos que servem de base para as operações da desigualdade:

1° Qualquer numero positivo é maior do que zero.
2° Zero é maior do que qualquer numero negativo.
3° Entre dois numeros negativos, o maior é o que tem o valor numerico menor.

Assim, $+1>0$, isto é, 1 positivo é maior do que zero.
$0>-1$, isto é, zero é maior do que 1 negativo.
$-2>-5$, isto é, 2 negativo é maior do que 5 negativo.

257. Quasi todas as alterações que effectuamos nas equações do primeiro grau, podem ser tambem operadas nas desigualdades, como vamos reconhecer nos seguintes principios:

1° Se juntarmos o mesmo numero ou a mesma quantidade a ambos os membros de uma desigualdade, ou se de ambos os membros subtrahirmos o mesmo numero, a desigualdade não ficará alterada.

Illustração. Se a cada membro da igualdade $7>5$ addicionarmos 4, teremos a expressão $7+4>5+4$ que simplificada dá $11>9$; Se subtrahirmos 4, teremos $7-4>5-4$ ou $3>1$, ficando a mesma differença; em ambos os casos, a differença é 2.

Isto é intuitivo, porque se a cada um dos membros da desigualdade $a>b$ addicionarmos ou subtrahirmos a quantidade m, teremos $a+m>b+m$ ou $a-m>b-m$; ora a desigualdade entre a e b ficará a mesma, desde que ambos os membros tenham o mesmo augmento ou diminuição.

258. *2° Qualquer termo de um membro póde ser mudado para o outro membro, trocando-se-lhe o signal.*

Illustração. Estabelecendo a desigualdade $a^2+b^2>2ab+c^2$, accrescentando $-2ab$ a ambos os membros, temos $a^2+b^2-2ab>2ab-2ab+c^2$, reduzindo os termos, temos $a^2-2ab+b^2>c^2$.

Vemos aqui o termo $-2ab$ mudado de um membro para o outro, ficando com o signal trocado.

259. *3° Se os dois membros de uma desigualdade forem multiplicados ou divididos por um mesmo numero positivo, a desigualdade continuará no mesmo sentido.*

Illustração. Se multiplicarmos por 3, ambos os membros da desigualdade $8>4$, teremos $8\times3>4\times3$ ou $24>12$; em ambos os casos, o numero maior contém duas vezes o menor. Se os dividirmos por 2, teremos $8\div2>4\div2$ ou $4>2$, tambem contendo o numero maior duas vezes o menor.

Mas se os dois membros da desigualdade forem multiplicados ou divididos por um mesmo numero negativo, a desigualdade resultante ficará em sentido contrario.

Illustração. Se multiplicarmos ambos os membros de $8>5$ por -2, teremos $8\times-2>5\times-2$ que reduzido dá $-16<-10$, pois, como já vimos, entre duas quantidades negativas a maior é a que tem o valor numerico menor. (N.° 256.)

O mesmo resultado se observa na divisão.

260. *4° Se mudarmos os signaes de todos os termos de ambos os membros de uma desigualdade, ella ficará com o sentido contrario, porque esta mudança dá o mesmo resultado que multiplicar todos os seus termos por -1.*

Illustração. Assim, na desigualdade $8+3-2>2+3-1$, mudando o signal dos termos, temos $-8-3+2<-2-3+1$, reduzindo os termos, temos $-9<-4$.

Na desigualdade que serve de exemplo, é maior o primeiro membro, mas sendo trocados os signaes, fica maior o segundo membro, e por isso fica em sentido contrario, pois -4 é maior do que -9.

261. *5° Se duas desigualdades formadas no mesmo sentido forem sommadas membro a membro correspondente, a desigualdade resultante não mudará de sentido.*

Illustração. A somma das desigualdades $7>3$ e $4>1$ é $7+4>3+1$ ou $11>4$. Este enunciado é intuitivo, porque os membros da esquerda, sendo maiores do que os da direita, a somma daquelles será tambem maior do que a destes.

Mas se nas duas desigualdades, em vez da addição, operarmos a subtracção, o resultado póde ser no mesmo sentido, no sentido contrario ou resultar uma igualdade.

Illustração. Os tres exemplos seguintes de subtracção mostram este principio:

(Mesmo sentido)	(Sentido contrario)	(Igualdade)
$7>3$	$10>9$	$10>9$
$4>1$	$8>3$	$8>7$
$3>2$	$2<6$	$2=2$

Generalizando este principio podemos estabelecer que de $a>b$ subtrahindo $c>d$, o resultado, segundo os valores particulares de a, b, c e d, poderá ser $a-c>b-d$, $a-c<b-d$ ou $a-c=b-d$.

262. *6° Se os dois membros de uma desigualdade, sendo positivos, forem elevados á mesma potencia, ou se delles se extrahir a mesma raiz, a desigualdade resultante ficará no mesmo sentido.*

Illustração. As desigualdades $3>2$, e $3^2>2^2$ que é $9>4$, estão no mesmo sentido. Do mesmo modo, $25>16$, e $\sqrt{25}>\sqrt{16}$ que é $5>4$ estão tambem no mesmo sentido.

E' claro que, se o primeiro membro for maior do que o segundo, o seu quadrado será tambem maior do que o segundo, e o mesmo succederá com as suas raizes. Mas se os dois membros não forem positivos, a elevação de potencias e a extracção de raizes nem sempre darão uma desigualdade no mesmo sentido.

263. Resolver uma desigualdade é determinar o limite superior ou inferior do valor que a incognita póde ter para satisfazer as condições apresentadas em um problema.

Em geral resolve-se uma desigualdade do mesmo modo que uma equação do primeiro grau, observando os principios que acabamos de expôr.

I Problema. Achar um numero de cujo triplo tirando 4, o resto seja maior do que o mesmo numero e mais 6.

Solução. Seja x o numero requerido, e pelas condições do problema, temos

a seguinte desigualdade.............. $3x-4>x+6$,

transpondo os termos, temos.......... $3x-x>6+4$,

reduzindo os termos e dividindo........ $x>5$.

Sendo o numero maior do que 5, póde ser 6, visto não ter outro limite.

264. Se um problema de desigualdade offerecer duas condições, em uma, a incognita apresentará o limite superior, e em outra, o limite inferior.

II Problema. Cinco vezes certo numero e mais 4 é maior do que duas vezes esse numero e mais 19; e cinco vezes esse numero menos 4 é menor que quatro vezes o numero e mais 4. Requer-se o numero.

Solução. Seja x o numero requerido no problema.

A primeira condição é........................ $5x+4>2x+19$ (1ª)

A segunda condição é........................ $5x-4<4x+4$ (2ª)

	(1ª)	(2ª)
Transpondo os termos em ambas	$5x-2x>19-4$,	$5x-4x>4+4$,
reduzindo os termos..........	$3x>15$,	$x<8$.
dividindo a (1ª) por 3..........	$x>5$.	

Desde que x mostra um numero maior do que 5, e menor do que 8, segue-se que esse numero póde ser 6 ou 7, visto ambos satisfazerem as condições do problema.

III Problema. Demonstrar que a somma dos quadrados de duas quantidades desiguaes é maior do que duas vezes o producto dessas quantidades, isto é, que $a^2+b^2>2ab$.

Demonstração. Desde que o quadrado de um numero, quer esse numero seja positivo ou negativo, é sempre uma quantidade positiva, como vimos na regra dos signaes n.º 73; e como qualquer numero positivo é maior do que zero (n.º 256), segue-se que $a^2-2ab+b^2$ que é o quadrado de $(a-b)$, é maior do que zero.

Portanto........................ $a^2-2ab+b^2>0$,

juntando $2ab$ a ambos os membros.... $a^2-2ab+2ab+b^2>0+2ab$,

reduzindo os termos................ $a^2+b^2>2ab$.

Fica, portanto, demonstrado que a^2+b^2 é maior do que $2ab$.

Regra. *Para resolvermos uma desigualdade, faremos todas as transformações necessarias para achar o valor mais approximado da incognita, operando como nas equações do primeiro grau.*

Resolver os seguintes problemas:

4. Se $4x-7<2x+3$, e se $3x+1>13-x$, qual é o valor de x? Resp. Sendo maior que 3, e menor que 5, é 4.

5. Achar o limite de x na desigualdade $7x-3>32$. Resp. $x>5$.

6. Achar o limite de x em $5+\frac{x}{3}<8+\frac{x}{4}$. Resp. $x<36$.

7. O dobro de certo numero e mais 7 é menor que 19; e o seu triplo menos 5 é menor que 13. Requer-se o numero. Resp. ?

8. Determinar quanto a somma a^2+b^2 excede ao producto $2ab$. Resp. $(a-b)^2$.

FORMAÇÃO DAS POTENCIAS

265. Quando definimos os termos algebricos (n.os **24 a 29**) démos uma exposição resumida dos symbolos que representam as diversas potencias e raizes, para os discipulos poderem ler estas expressões, e effectuar com ellas as quatro operações algebricas sobre inteiros e fracções. Agora, porém, que temos de entrar na formação dessas potencias e extracção das suas raizes, precisamos desenvolver mais este ponto.

266. A palavra **potencia** é usada em Algebra para significar o producto de uma quantidade multiplicada por si mesma um certo numero de vezes.

Qualquer quantidade é geralmente considerada como a primeira potencia de si mesma; mas rigorosamente fallando, ella não é potencia, mas sim raiz ou factor do qual se podem formar potencias; assim x, tomado uma só vez como factor, não dá producto nem potencia, porque $x^1=x$.

267. A segunda potencia ou o **quadrado** de uma quantidade é o producto dessa quantidade tomada duas vezes como factor. Assim, a segunda potencia de x é x^2, porque $x\times x=x^2$.

268. A terceira potencia ou o **cubo** de uma quantidade é o producto dessa quantidade tomada tres vezes como factor. Assim, a terceira potencia de y é y^3, porque $y\times y\times y=y^3$.

269. A quarta potencia de uma quantidade é o producto dessa quantidade tomada quatro vezes como factor. Assim, a quarta potencia de a é a^4, porque $a\times a\times a\times a=a^4$. E do mesmo modo, seguem as demais potencias.

A formação das potencias ou **Potenciação** é a operação que tem por fim achar qualquer potencia de uma quantidade.

Nota. *Formação de potencias* e *extracção de raizes* teem outras denominações. Os auctores inglezes e norte-americanos chamam ao primeiro processo *involução* (involution), e ao segundo, *evolução* (evolution). Alguns auctores dão tambem ao primeiro o nome de *potenciação*, e ao segundo, o de *radiciação*.

270. Chama-se **expoente** o numero escripto no alto direito de uma quantidade para mostrar o grau da sua potencia, isto é, quantas vezes elle tem de ser tomado como factor. (n.° **25**). Assim,

A 1ª potencia de 3 é 3 ou 3^1.
A 2ª potencia de 3 é $3\times 3=3^2=9$.
A 3ª potencia de 3 é $3\times 3\times 3=3^3=27$.
A 4ª potencia de 3 é $3\times 3\times 3\times 3=3^4=81$.

A 2ª potencia de x é $x\times x=x^2$.
A 3ª potencia de x é $x\times x\times x=x^3$.
A 4ª potencia de x é $x\times x\times x\times x=x^4$, etc.

Daqui se vê que 3 é raiz de 9, 27, 81, etc. ; e x é raiz de x^2, x^3, x^4, etc.

Elevação de um monomio a qualquer potencia

271. Problema. Qual é a terceira potencia de $2ab^2$?

Solução, Segundo a definição, a terceira potencia de $2ab^2$ deve ser o producto desta quantidade tomada tres vezes como factor. Então,

$$(2ab^2)^3=2ab^2\times 2ab^2\times 2ab^2=2\times 2\times 2\times aaa\times b^2b^2b^2 \text{ ou}$$
$$=2^3\times a^{1+1+1}\times b^{2+2+2}=8a^3b^6.$$

Neste exemplo vê-se que o coefficiente 2 se eleva á terceira potencia e fica 8, e ás lettras a e b^2 se lhes dá tres vezes os seus expoentes ou se multiplicam estes por 3, e ficam a^3b^6.

272. Nos signaes das potencias ha dois casos a considerar, que são:

1° Quando uma quantidade é positiva.
2° Quando uma quantidade é negativa.

273. Primeiro caso. Quando uma quantidade é positiva, dará todas as suas potencias positivas, porque, seja qual for o numero de vezes que ella entre como factor, o producto será sempre positivo ; pois + multiplicado por + dá +. (n.° **73**). Assim,

$$(+a)\times(+a)=+a^2, \text{ e tambem } (+a)\times(+a)\times(+a)=+a^3.$$

274. Segundo caso. Quando uma quantidade é negativa, temos os seguintes resultados:

$(-a)\times(-a)=+a^2$; a 2ª potencia é positiva.
$(-a)\times(-a)\times(-a)=-a^3$; a 3ª potencia é negativa.
$(-a)\times(-a)\times(-a)\times(-a)=+a^4$; a 4ª potencia é positiva.
$(-a)\times(-a)\times(-a)\times(-a)\times(-a)=-a^5$; a 5ª potencia é negativa.

Daqui vemos que o producto de um numero **par** de factores negativos é positivo ; e o producto de um numero **impar** de factores negativos é negativo. Por isso as potencias pares de uma quantidade negativa são todas positivas, e as potencias impares são negativas.

Regra. *Para se elevar um monomio a qualquer potencia, eleva-se o coefficiente numeral ao grau requerido, e multiplica-se o* [illegible]*ente de cada lettra pelo expoente da potencia. E, se o monomio for* [illegible]*tivo, todas as potencias serão positivas ; mas se for negativo,*

todas as potencias pares serão positivas, e todas as potencias impares serão negativas.

		Respostas
1.	Achar o quadrado de $3ax^2y^3$.	$9a^2x^4y^6$.
2.	Achar o quadrado de $5b^2c^3$.	$25b^4c^6$.
3.	Achar o cubo de $2x^2y^3$.	$8x^6y^9$.
4.	Achar o quadrado de $-ab^2c$.	$a^2b^4c^2$.
5.	Achar o cubo de $-abc^2$.	$-a^3b^3c^6$.
6.	Achar a quarta potencia de $3ab^3c^2$.	$81a^4b^{12}c^8$.
7.	Achar a quarta potencia de $-3ab^3c^2$.	$81a^4b^{12}c^8$.
8.	Achar a quinta potencia de ab^3cd^2.	$a^5b^{15}c^5d^{10}$.
9.	Achar a quinta potencia de $-ab^3c^2$.	$-a^5b^{15}c^{10}$.
10.	Achar a setima potencia de $-m^2n^3$.	?
11.	Achar o cubo de $-3a^4$.	?
12.	Achar a quarta potencia de $7a^2x^3$.	?

Elevação de um polynomio a qualquer potencia

275. Problema. Qual é o quadrado de $ax+cy$?

Solução. Multiplicando $ax+cy$ por si mesmo, ou seguindo o enunciado do 1° theorema (n.° 96), obtemos o seu quadrado, como se vê na expressão ao lado.

$$(ax+cy)(ax+cy)=a^2x^2+2acxy+c^2y^2.$$

Regra. *Para se elevar um polynomio a qualquer potencia, acha-se o producto dessa quantidade, tomada como factor tantas vezes quantas forem as unidades do expoente da potencia requerida.*

		Respostas
1.	Achar o quadrado de $1-x$.	$1-2x+x^2$.
2.	Achar o quadrado de $x+1$.	x^2+2x+1.
3.	Achar o quadrado de $a-cy$.	$a^2-2acy+c^2y^2$.
4.	Achar o quadrado de $2x^2-3y^2$.	$4x^4-12x^2y^2+9y^4$.
5.	Achar o cubo de $a+x$.	$a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$.
6.	Achar o cubo de $x-y$.	$x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$.
7.	Achar o cubo de $2x-1$.	$8x^3-12x^2+6x-1$.
8.	Achar o valor de $(c-x)^4$.	$c^4-4c^3x+6c^2x^2-4cx^3+x^4$.
9.	Achar o quadrado de $a+b+c$.	?
10.	Achar a quarta potencia de $b+6$.	?

Elevar uma fracção a qualquer potencia

276. Problema. Qual é o quadrado de $\frac{a+b}{a-b}$?

Solução. Multiplicando a fracção por si mesma, obtemos o seu quadrado.

$$\frac{a+b}{a-b}\times\frac{a+b}{a-b}=\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-\ldots}$$ [illegible]

Regra. *Elevam-se os dois termos da fracção á potencia requerida.*

1.	Achar o quadrado de $\frac{2x}{3y}$.	Resp. $\frac{4x^2}{9y^2}$.
2.	Achar o quadrado de $\frac{ac^2}{x^2y}$.	» $\frac{a^2c^4}{x^4y^2}$.
3.	Achar o cubo de $-\frac{2a}{x^2y^3}$.	» $-\frac{8a^3}{x^6y^9}$.
4.	Achar o quadrado de $\frac{2x^2}{3y}$.	» $\frac{4x^4}{9y^2}$.
5.	Achar o quadrado de $\frac{x-2}{x+3}$.	» $\frac{x^2-4x+4}{x^2+6x+9}$.

Binomio de Newton

277. Todos os binomios pódem ser elevados á qualquer potencia por meio de multiplicações successivas, mas este processo, além de ser muito moroso, está sujeito a muitos erros. O grande mathematico inglez Isaac Newton descobriu um processo facilimo de elevar um binomio a qualquer potencia, sem esse trabalho fastidioso, nem o perigo de errar. A esse processo admiravel deu-se o nome de **Binomio de Newton.**

Para comprehendermos a base em que assentam as leis desta fórmula importante, elevemos os binomios $(a+b)$ e $(a-b)$ até a quinta potencia, supprimindo as diversas multiplicações para não tomarem aqui muito espaço :

2ª Potencia. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
3ª Potencia. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
4ª Potencia. $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.
5ª Potencia. $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.
2ª Potencia. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
3ª Potencia. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.
4ª Potencia. $(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$.
5ª Potencia. $(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$.

278. Nas diversas potencias destes dois binomios, temos de analysar quatro pontos, que são :

1° O numero de termos.
2° Os signaes dos termos.
3° Os expoentes dos termos.
4° Os coefficientes dos termos.

Analysemos cada um destes pontos separadamente.

Numero de termos

279. Examinando o numero de termos de cada potencia dos dois binomios, vemos que a segunda potencia tem tres termos; a

terceira potencia tem quatro termos, a quarta potencia tem cinco, a quinta potencia tem seis; daqui inferimos que *o numero dos termos de qualquer potencia de um binomio, é 1 mais que o expoente da potencia.*

Signaes dos termos

280. Examinando-se os signaes, fica evidente que *quando ambos os termos do binomio são positivos, todos os termos das potencias são positivos.*

Quando o primeiro termo é positivo e o segundo negativo, todos os termos **impares** *são positivos e os* **pares** *são negativos.*

Nota. Termos impares são o 1°, 3°, 5°, etc.; e termos pares são o 2°, 4°, 6°, etc., começando pela esquerda.

Expoentes dos termos

281. Se omittirmos os coefficientes da quinta potencia de $a-b$ e $a+b$, a parte litteral será

$(a+b)^5$ .... $a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5$.
$(a-b)^5$ .... $a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5$.

Examinando estas e outras potencias de $a+b$ e $a-b$, vemos que os expoentes das lettras são regidos pelas seguintes leis:

1ª *O expoente da lettra no primeiro termo é o mesmo que o da potencia do binomio; e o expoente desta lettra nos outros termos vai diminuindo 1 da esquerda para a direita, até o ultimo termo que já não tem mais esta lettra.*

2ª *O expoente da segunda lettra é 1 no segundo termo da potencia, e os outros expoentes desta lettra vão crescendo 1 da esquerda para a direita, até o ultimo termo, no qual o expoente é o mesmo que o da potencia do binomio.*

3ª *A somma dos expoentes das duas lettras, em qualquer termo, é sempre a mesma, e é igual á potencia do binomio.*

Nota. O discipulo poderá agora empregar estes principios escrevendo as differentes potencias dos binomios, omittindo os coefficientes, como se vê nos exemplos seguintes:

$(x+y)^3$ .... $x^3+x^2y+xy^2+y^3$.
$(x-y)^4$ .... $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4$.
$(x+y)^5$ .... $x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5$.
$(x-y)^5$?
$(x+y)^6$?
$(x-y)^7$?
$(x+y)^7$?

Coefficientes dos termos

282. Examinando os coefficientes das diversas potencias de $a+b$ e $a-b$, vemos que

O coefficiente do primeiro termo é sempre 1 subentendido e o coefficiente do segundo termo é o mesmo que o expoente da potencia do binomio.

A lei que rege os coefficientes dos termos seguintes póde ser assim expressa:

Se o coefficiente de qualquer termo for multiplicado pelo expoente da primeira lettra, e o producto dividido pelo numero da ordem desse termo, o quociente será o coefficiente do termo seguinte.

Para esta lei ficar bem comprehendida, vamos illustral-a escrevendo a sexta potencia de $a+b$, pondo sobre cada termo o seu respectivo coefficiente, e debaixo o numero de sua ordem para facilitar a explicação e o calculo.

$$\overset{1}{a^6} + \overset{6}{a^5b} + \overset{15}{a^4b^2} + \overset{20}{a^3b^3} + \overset{15}{a^2b^4} + \overset{6}{ab^5} + \overset{1}{b^6}.$$

1°,	2°,	3°,	4°,	5°,	6°,	7°.

Para comprehendermos esta illustração devemos notar que, em uma potencia ordenada (n.° 93), cada termo tem a sua ordem ou lugar. Assim o primeiro termo da esquerda é o termo da 1ª ordem; o segundo termo é da 2ª ordem; o terceiro é da 3ª ordem, e assim por diante; de modo que os numeros 1°, 2°, 3°, etc., mostram a ordem ou o lugar em que o termo está escripto na potencia.

O coefficiente do primeiro termo é sempre 1 subentendido. O coefficiente do segundo termo é o expoente do primeiro termo, que é 6. Nos dados do segundo termo temos de achar o coefficiente do terceiro termo. Então multiplicando o coefficiente que é 6, pelo expoente de a que é 5, e dividindo o producto pelo numero de sua ordem que é 2, temos $\frac{6\times5}{2}=15$ que é o coefficiente do terceiro termo. Nos dados do terceiro termo temos de achar o coefficiente do quarto termo: multiplicando o coefficiente 15 pelo expoente de a que é 4, e dividindo o producto pelo numero de sua ordem que é 3, temos $\frac{15\times4}{3}=20$ que é o coefficiente do quarto termo.

Proseguindo assim, vemos que os coefficientes de todos os termos são:

$$1,\quad 6,\quad \frac{6\times5}{2},\quad \frac{15\times4}{3},\quad \frac{20\times3}{4},\quad \frac{15\times2}{5},\quad \frac{6\times1}{6}.$$

ou $1,\quad 6,\quad 15,\quad 20,\quad 15,\quad 6,\quad 1.$

Estes coefficientes juntos aos seus respectivos termos dão:

$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6.$$

283. Segundo a lei que acabamos de illustrar, vemos que os coefficientes

de $(a+b)^2$ são 1, 2, 1.
de $(a+b)^3$ são 1, 3, 3, 1.
de $(a+b)^4$ são 1, 4, 6, 4, 1.
de $(a+b)^5$ são 1, 5, 10, 10, 5, 1.
de $(a+b)^6$ são 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

Devemos notar aqui que os coefficientes crescem até ao meio da potencia, e depois decrescem na mesma razão; por isso basta sómente calcular os coefficientes até ao meio da potencia, e depois repetir os mesmos numeros em ordem inversa.

284. Qualquer potencia de 1 é sempre 1; assim, $1\times1=1$, $1\times1\times1=1$. Quando 1 é factor, não influe sobre a quantidade com que se multiplica, assim, $1\times x=x$, $ab\times1=ab$.

Potenciar as seguintes quantidades por meio do Binomio de Newton:

1. Elevar $x+y$ á terceira potencia. Resp. ?
2. Elevar $x-y$ á quarta potencia. » ?
3. Elevar $m+n$ á quinta potencia. » ?
4. Elevar $x-z$ á sexta potencia. » ?
5. Qual é a setima potencia de $a+b$? » ?
6. Achar a terceira potencia de $x+1$. » ?
7. Qual é a quarta potencia de $b-1$. » ?
8. Elevar $1-a$ á quinta potencia. » ?

285. Quando os termos de um binomio teem coefficientes e expoentes, abrevia-se a potenciação, operando-se com um binomio simples, e depois substituindo-se os seus diversos termos pelos valores correspondentes do binomio dado.

Exemplo. Qual é a terceira potencia de $2x-ac^2$?

Solução. Se substituirmos $2x$ por m, e ac^2 por n teremos $(2x-ac^2)=(m-n)$, binomio simples. Então $(m-n)^3=m^3-3m^2n+3mn^2-n^3$. Precisamos agora comprehender que

sendo $m=2x$,	sendo $n=ac^3$,
então $m^2=4x^2$,	então $n^2=a^2c^4$.
e $m^3=8x^3$;	e $n^3=a^3c^6$.

Se substituirmos agora as diversas potencias de m e n por seus respectivos valores nas potencias de $2x$ e ac^2, teremos:

1° Termo $m^3=$ .... $8x^3$
2° Termo $3m^2n=3(4x^2\times ac^2)=12ac^2x^2$
3° Termo $3mn^2=3(2x\times a^2c^4)=6a^2c^4x$
4° Termo $n^3=$ .... a^3c^6

Ordenando os termos desta terceira potencia, temos

$$(2x-ac^2)^3=8x^3-12ac^2x^2+6a^2c^4x-a^3c^6.$$

Potenciar deste modo os seguintes exemplos:

1. Qual é a terceira potencia de $3a^2-5b$?
Resp. $27a^6-135a^4b+225a^2b^2-125b^3$.

2. Qual é a terceira potencia de $2ax+by$?
Resp. $8a^3x^3+12a^2x^2by+6axb^2y^2+b^3y^3$.
3. Qual é a quinta potencia de x^2+3y^2?
Resp. $x^{10}+15x^8y^2+90x^6y^4+270x^4y^6+405x^2y^8+243y^{10}$.

286. Quando um dos termos do binomio é uma fracção, podemos de dois modos achar o quadrado do binomio: multiplicando a fracção ou transformando o binomio em uma fracção impropria.

(1° Modo)	(2° Modo)
$x+\frac{1}{2}$	$x+\frac{1}{2}=\frac{2x+1}{2}$
$x+\frac{1}{2}$	
$x^2+\frac{1}{2}x$	$\left(\frac{2x+1}{2}\right)^3=\frac{4x^2+4x+1}{4}$
$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$	
$x^2+x+\frac{1}{4}$.	ou $x^2+x+\frac{1}{4}$.

Solução. Multiplicando-se o binomio por si mesmo, o quadrado é $x^2+x+\frac{1}{4}$ Reduzindo o binomio a uma fracção impropria, e quadrando a fracção achamos o mesmo resultado.

Outros modos de formar um quadrado

287. Como já vimos na secção **248**, o modo directo e simples de achar o quadrado de um numero é multiplicar esse numero por si; assim o quadrado de 12 é $12\times12=144$. Ha porém outros modos de formar o quadrado de um numero, os quaes precisamos tambem conhecer.

288. O quadrado de um numero superior a 10 póde ser formado pela aggregação das diversas partes de que é formado. O numero 11 póde ser decomposto em duas quantidades que são $10+1$; o numero 12, em $10+2$; o numero 13, em $10+3$, e assim por diante.

Ora como *«o quadrado da somma de duas quantidades é igual ao quadrado da primeira, mas duas vezes o producto da primeira multiplicada pela segunda, mas o quadrado da segunda»* (**secção 96**), segue-se que se decompozermos o numero 12 em $10+2$, e aggregarmos as diversas partes mencionadas no theorema acima, teremos o quadrado de 12. Verifiquemos este caso:

Quadrado da primeira quantidade..........................	10×10	$=100$
Duas vezes o producto da primeira quantidade multiplicada pela segunda..	$2(10\times2)$	$=40$
Quadrado da segunda quantidade..........................	2×2	$=4$
Prova..........	12×12	$=144$

Se o numero for composto de tres algarismos, como por exemplo 125, poderemos decompol-o em $120+5$, e depois formar o seu quadrado do mesmo modo.

Exemplo :

Quadrado da primeira quantidade......................	$120\times120=14400$
Duas vezes o producto da primeira quantidade multiplicada pela segunda................................	$2(120\times5) = 1200$
Quadrado da segunda quantidade......................	$5\times5 = 25$
Prova...........	$125\times125=15625$

289. Podemos tambem achar o quadrado de um numero por meio do quadrado de um numero inferior.

A differença entre os quadrados de dois numeros inteiros e consecutivos é igual ao dobro do menor mais uma unidade. Assim 8 e 9 são numeros consecutivos; os seus quadrados são $8\times8=64$ e $9\times9=81$; a differença entre estes quadrados é $81-64=17$. Ora 17 é igual ao dobro de 8, que é o numero menor, e mais uma unidade ou 1.

Demonstração algebrica. Seja a o numero menor, e $(a+1)$ o numero maior. Quadrando estas duas quantidades e subtrahindo a menor da maior, teremos $2a+1$, isto é, o *dobro da quantidade menor mais 1.*

$$\begin{array}{r} (a+1)^2=a^2+2a+1 \\ a^2=a^2 \\ \hline 2a+1 \end{array}$$

Com o quadrado de um numero qualquer podemos, pois, formar os quadrados dos numeros seguintes sómente por meio de simples addições.

Problema. Sendo 625 o quadrado de 25, qual é o quadrado de 26 e de 27 ?

Solução. Sendo 625 o quadrado de 25, o quadrado de 26 é 625 mais 50, que é o dobro de 25, e mais 1, isto é, 676. O quadrado de 27 é 676, mais 52 que é o dobro de 26, e mais 1, isto é, $676+52+1=729$; e assim por diante.

$$\begin{array}{r} 625 \\ 50 \\ 1 \\ \hline 676 \end{array}$$

290. Daqui deduzimos o seguinte corollario :

Se juntarmos a um quadrado perfeito o dobro da sua raiz e mais 1, obteremos o quadrado perfeito immediato superior.

Podemos portanto formar facilmente uma série de quadrados perfeitos, addicionando a cada quadrado o dobro da sua raiz e mais 1. Assim,

100.................. é o quadrado de 10;
$100+10+10+1=121$ é o quadrado de 11;
$121+11+11+1=144$ é o quadrado de 12;
$144+12+12+1=169$ é o quadrado de 13;
$169+13+13+1=196$ é o quadrado de 14;

EXTRACÇÃO DA RAIZ QUADRADA

291. A raiz é um dos factores iguaes de uma quantidade.

A raiz, assim como as potencias, distingue-se pelo seu grau, como : raiz quadrada ou segunda raiz, raiz cubica ou terceira raiz, quarta raiz, etc.

292. A **raiz quadrada** é um dos dois factores iguaes de uma quantidade. Assim a raiz quadrada de 25 é 5, porque $5\times5=25$; a raiz quadrada de x^2 é x, porque $x\times x=x^2$.

293. A **raiz cubica** é um dos tres factores iguaes de uma quantidade. Assim a raiz cubica de 27 é 3, porque $3\times3\times3=27$; a raiz cubica de x^3 é x porque $x\times x\times x=x^3$.

Nota. As palavras potencias e raizes são termos correlativos. Se uma quantidade é uma potencia de outra, a ultima é raiz da primeira. Assim, a^3 é o cubo de a, e a é a raiz cubica de a^3.

294. A **extracção de uma raiz,** a que alguns dão tambem o nome de **radiciação,** tem por fim, dado o grau da raiz de uma potencia, achar o factor que serviu de base para a formação dessa potencia.

Extrahir a raiz quadrada de uma quantidade é achar o factor que, multiplicado por si, dê essa quantidade.

Nota. De tres modos podemos decompôr uma quantidade, a saber : pela subtracção, pela divisão e pela extracção das raizes.

Pela *subtracção*, uma quantidade é separada em duas partes que sommadas dão essa quantidade.

Pela *divisão*, uma quantidade é decomposta em dois factores que multiplicados produzem essa quantidade.

Pela *extracção das raizes*, uma potencia é decomposta em factores iguaes que, multiplicados entre si, produzem essa potencia.

295. Em Algebra, as raizes exprimem-se de dois modos, a saber :

1° Pelo signal radical.
2° Pelo expoente fraccionario.

296. Primeiro modo. O signal radical é a figura $\sqrt{}$ que se escreve sobre uma quantidade, para mostrar que ella deve ser tomada no valor da raiz indicada pelo indice.

297. Indice da raiz é o numero escripto no angulo do signal radical para mostrar o seu grau. Assim,

$\sqrt[2]{16}=4$ lê-se: A raiz quadrada de 16 é igual a 4.

$\sqrt[3]{x^3}=x$ lê-se: A raiz cubica de x^3 é igual a x.

Se o numero for composto de tres algarismos, como por exemplo 125, poderemos decompol-o em 120+5, e depois formar o seu quadrado do mesmo modo.

Exemplo :

Quadrado da primeira quantidade....................	$120 \times 120 = 14400$
Duas vezes o producto da primeira quantidade multiplicada pela segunda..........................	$2(120 \times 5) = 1200$
Quadrado da segunda quantidade....................	$5 \times 5 = 25$
Prova...........	$125 \times 125 = 15625$

289. Podemos tambem achar o quadrado de um numero por meio do quadrado de um numero inferior.

A differença entre os quadrados de dois numeros inteiros consecutivos é igual ao dobro do menor mais uma unidade. Assim 8 e 9 são numeros consecutivos; os seus quadrados são $8 \times 8 = 64$ e $9 \times 9 = 81$; a differença entre estes quadrados é $81 - 64 = 17$. Ora 17 é igual ao dobro de 8, que é o numero menor, e mais uma unidade ou 1.

Demonstração algebrica. Seja a o numero menor, e $(a+1)$ o numero maior. Quadrando estas duas quantidades e subtrahindo a menor da maior, teremos $2a+1$, isto é, o *dobro da quantidade menor mais 1.*

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$$
$$a^2 = a^2$$
$$\overline{\qquad 2a + 1}$$

Com o quadrado de um numero qualquer podemos, pois, formar os quadrados dos numeros seguintes sómente por meio de simples addições.

Problema. Sendo 625 o quadrado de 25, qual é o quadrado de 26 e de 27 ?

Solução. Sendo 625 o quadrado de 25, o quadrado de 26 é 625 mais 50, que é o dobro de 25, e mais 1, isto é, 676. O quadrado de 27 é 676, mais 52 que é o dobro de 26, e mais 1, isto é, $676 + 52 + 1 = 729$; e assim por diante.

$$\begin{array}{r} 625 \\ 50 \\ 1 \\ \hline 676 \end{array}$$

290. Daqui deduzimos o seguinte corollario :

Se juntarmos a um quadrado perfeito o dobro da sua raiz e mais 1, obteremos o quadrado perfeito immediato superior.

Podemos portanto formar facilmente uma série de quadrados perfeitos, addicionando a cada quadrado o dobro da sua raiz e mais 1. Assim,

100................ é o quadrado de 10;
$100 + 10 + 10 + 1 = 121$ é o quadrado de 11;
$121 + 11 + 11 + 1 = 144$ é o quadrado de 12;
$144 + 12 + 12 + 1 = 169$ é o quadrado de 13;
$169 + 13 + 13 + 1 = 196$ é o quadrado de 14;
$196 + 14 + 14 + 1 = 225$ é o quadrado de 15; etc.

EXTRACÇÃO DA RAIZ QUADRADA

291. A raiz é um dos factores iguaes de uma quantidade.

A raiz, assim como as potencias, distingue-se pelo seu grau, como : raiz quadrada ou segunda raiz, raiz cubica ou terceira raiz, quarta raiz, etc.

292. A **raiz quadrada** é um dos dois factores iguaes de uma quantidade. Assim a raiz quadrada de 25 é 5, porque $5 \times 5 = 25$; a raiz quadrada de x^2 é x, porque $x \times x = x^2$.

293. A **raiz cubica** é um dos tres factores iguaes de uma quantidade. Assim a raiz cubica de 27 é 3, porque $3 \times 3 \times 3 = 27$; a raiz cubica de x^3 é x porque $x \times x \times x = x^3$.

Nota. As palavras potencias e raizes são termos correlativos. Se uma quantidade é uma potencia de outra, a ultima é raiz da primeira. Assim, a^3 é o cubo de a, e a é a raiz cubica de a^3.

294. A **extracção de uma raiz,** a que alguns dão tambem o nome de **radiciação,** tem por fim, dado o grau da raiz de uma potencia, achar o factor que serviu de base para a formação dessa potencia.

Extrahir a raiz quadrada de uma quantidade é achar o factor que, multiplicado por si, dê essa quantidade.

Nota. De tres modos podemos decompôr uma quantidade, a saber : pela subtracção, pela divisão e pela extracção das raizes.

Pela *subtracção*, uma quantidade é separada em duas partes que sommadas dão essa quantidade.

Pela *divisão*, uma quantidade é decomposta em dois factores que multiplicados produzem essa quantidade.

Pela *extracção das raizes*, uma potencia é decomposta em factores iguaes que, multiplicados entre si, produzem essa potencia.

295. Em Algebra, as raizes exprimem-se de dois modos, a saber :

1° Pelo signal radical.
2° Pelo expoente fraccionario.

296. Primeiro modo. O signal radical é a figura $\sqrt{}$ que se escreve sobre uma quantidade, para mostrar que ella deve ser tomada no valor da raiz indicada pelo indice.

297. Indice da raiz é o numero escripto no angulo do signal radical para mostrar o seu grau. Assim,

$\sqrt[2]{16} = 4$ lê-se : A raiz quadrada de 16 é igual a 4.

$\sqrt[3]{x^3} = x$ lê-se : A raiz cubica de x^3 é igual a x.

$\sqrt[4]{625} = 5$ lê-se : A quarta raiz de 625 é igual a 5.

Nestes exemplos, os algarismos 2, 3 e 4 são os indices que mostram os graus das raizes. (Vêde o **n.° 29**).

298. Segundo modo. Exprime-se tambem a raiz com um expoente fraccionario, dando ao numerador o grau da potencia, e ao denominador o grau da raiz. Assim, $a^{\frac{1}{2}}$ mostra que da quantidade a^1 ou a devemos extrahir a raiz quadrada. Esta expressão é igual a $\sqrt[2]{a}$. Tambem $x^{\frac{2}{3}}$ mostra que de x^2 devemos extrahir a raiz cubica. Esta expressão é igual a $\sqrt[3]{x^2}$.

O valor de uma quantidade não ficará alterado, se trocarmos o expoente fraccionario por outro de igual valor. Assim, $a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{4}}=a^{\frac{3}{6}}=a^{\frac{5}{10}}$, etc. Este modo é agora desusado.

299. Quando um numero é composto de dois factores inteiros e iguaes, chama-se **quadrado perfeito.** Assim, 9 é quadrado perfeito, porque é composto de 3×3; 16 é quadrado perfeito, porque é composto de 4×4.

300. Os numeros que não são quadrados perfeitos, só podem ter uma raiz quadrada approximada, composta de um numero inteiro e uma fracção. Assim, a raiz quadrada de 10 é 3, 162277.., isto é, 3 inteiros e uma fracção decimal que, por mais approximada que seja, nunca esta raiz, multiplicada por si, produzirá exactamente o numero 10.

A raiz approximada de um numero, que não é quadrado perfeito, chama-se **raiz surda.**

301. Os quadrados perfeitos dos numeros inteiros, desde 1 até 100, são os seguintes:

Quadrados perfeitos:	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100.
Raizes quadradas:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.

Nesta tabella vemos que a raiz quadrada de 1 é 1, e que todos os quadrados desde 1 até 100 exclusive teem a raiz quadrada composta de um só algarismo; e por isso concluimos que *todo o quadrado que não tiver mais de dois algarismos, a sua raiz quadrada terá um só algarismo.*

302. Quadrando agora as dez primeiras dezenas, temos os seguintes resultados:

10,	20,	30,	40,	50,	60,	70,	80,	90,	100.
100,	400,	900,	1600,	2500,	3600,	4900,	6400,	8100,	10000.

Destes resultados vemos que todos os quadrados desde 100 até 10000 exclusive constam de tres ou quatro algarismos, e por isso concluimos que todo o quadrado que contêm mais de dois algarismos e não mais de quatro, terá a raiz quadrada com dois algarismos.

Do mesmo modo se póde tambem provar que o quadrado que contém mais de quatro algarismos e não mais de seis, terá a raiz quadrada com tres algarismos, e assim por diante.

Daqui formulamos o seguinte principio:

303. *Quando um numero contiver um ou dois algarismos, a sua raiz terá um só; quando contiver tres ou quatro, a raiz terá dois; quando contiver cinco ou seis, a raiz terá tres, e assim por diante.*

Nota. Quando um numero não for um quadrado perfeito, a sua raiz quadrada terá além do numero inteiro uma fracção decimal; mas os algarismos da fracção não entram nesta contagem.

304. Como já vimos na **secção 288**, qualquer numero de mais de um algarismo, póde ser decomposto em duas partes ou quantidades, sendo uma as dezenas e a outra as unidades. Assim o numero 23 póde ser decomposto em 2 dezenas e 3 unidades; o numero 256 póde ser decomposto em 25 dezenas e 6 unidades. De sorte que se representarmos as dezenas por d, e as unidades por u, qualquer numero poderá ser representado por $d+u$, e o seu quadrado por $d^2+2du+u^2$.

Ora os dois ultimos termos ou parcellas deste quadrado, que são $2du+u^2$ tambem podem ser expressas deste modo: $(2d+u)u$, isto é, *duas vezes as dezenas mais as unidades multiplicadas pelas unidades.* Deste modo, a fórmula do quadrado póde tambem ser assim expressa: $(d+u)^2=d^2+(2d+u)u$.

Esta nova fórmula facilita a extracção da raiz quadrada, e póde ser traduzida do seguinte modo:

O quadrado de qualquer numero de mais de um algarismo é composto do quadrado das dezenas, mais a quantidade que contém duas vezes as dezenas, mais as unidades multiplicadas pelas unidades.

Assim, o quadrado de 23, que é igual a duas dezenas e 3 unidades, é o seguinte:

Quadrado de duas dezenas =........................	$(20)^2=400$
(2 vezes as dezenas + 3 unidades) multiplicadas por 3.......	$=(40+3)\times3=129$
Prova	$23\times23=529$

305. Vamos agora operar no sentido inverso, isto é, extrahir a raiz quadrada de 529.

Problema. Qual é a raiz quadrada de 529?

Solução. Como o numero dado consta de tres algarismos, a sua raiz terá dois (**n.° 303**).

Desde que o quadrado de 2 dezenas é 400 e o quadrado de 3 dezenas é 900, é evidente que o maior quadrado perfeito contido em 500 é o quadrado de 2 dezenas $(20)^2$; o quadrado de 2 dezenas é 400; subtrahindo agora este quadrado de 529, o resto é 129. Portanto, 2 é o primeiro algarismo da raiz.

5,2 9	20+3=23
4 0 0	
1 2 9	(40+3)×3
1 2 9	
0 0 0	

Ora, segundo a formula acima, o resto 129 contém duas vezes as dezenas mais as unidades, multiplicadas pelas unidades, isto é, $(2d+u)u$.

Multiplicando-se as dezenas pelas unidades, o producto não póde ser inferior ás dezenas, e por isso o algarismo 9 não deve fazer parte do dobro das dezenas multiplicadas pelas unidades. Então, se dividirmos 120 pelo dobro das dezenas (40), o quociente será o algarismo que representa as unidades. Dividindo então 120 por 40, temos o quociente 3 que é o numero das unidades, e por conseguinte o segundo algarismo da raiz.

Este algarismo junto ao dobro das dezenas, dá $40+3=43$; multiplicando agora 43 por 3, temos o producto 129, que é o dobro das dezenas mais as unidades, multiplicadas pelas unidades $(2d+u)u$. Como subtrahindo este producto do resto do quadrado nada resta, segue-se que 23 é a raiz quadrada exacta de 529.

Quando se extrahe a raiz quadrada, é costume supprimirem-se as cifras no quadrado das dezenas, e operar-se o processo como no modelo que está ao lado.

5,2 9	23
4	
1 2 9	
1 2 9	43×3
0 0 0	

Modo pratico da extracção

Problema. Qual é a raiz quadrada de 182329?

Solução. O numero 182329 tem 3 classes, e por isso a sua raiz terá tambem 3 algarismos.

Começa-se sempre a extracção pela primeira classe da esquerda. A raiz quadrada de 18 é 4. Escreve-se 4, como o primeiro algarismo da raiz, e como um divisor á direita do numero. Subtrahe-se de 18 o quadrado de 4, que é 16, o resto 2, com a classe seguinte, fórma o novo dividendo 223.

18,23,29	427 Raiz
16	
223	82×2=164
164	
5929	847×7=5929
5929	
0000	

Dobra-se o divisor 4, que fica 8, e escreve-se abaixo como um divisor indicante. (Chama-se divisor indicante, porque elle indica o algarismo seguinte da raiz).

Para se achar o algarismo seguinte da raiz, divide-se o dividendo 223, menos o ultimo algarismo da direita, pelo divisor indicante, e o quociente será o segundo algarismo da raiz. Nesta divisão despreza-se o resto.

Dividindo-se 22 por 8, o quociente é 2, e por isso o segundo algarismo da raiz é 2. Escreve-se 2 na raiz e tambem junto com o divisor indicante, que fica 82, e se torna divisor completo. Multiplica-se pelo segundo algarismo da raiz o divisor completo, e o producto 164 se subtrahe do dividendo 223 e o resto 59, com a classe seguinte, fórma o novo dividendo 5929.

Para se achar o ultimo algarismo da raiz, desce-se o divisor 82, com o segundo algarismo dobrado, para ser um novo divisor indicante, e então fica 84. Divide-se o novo dividendo pelo divisor 84, e o quociente 7 será o ultimo algarismo da raiz. Escreve-se 7 na raiz e tambem junto com o divisor 84, ficando então 847, divisor completo, e multiplicando-se este divisor completo pelo ultimo algarismo da raiz, teremos o producto 5929 que subtrahido do dividendo, nada resta. Logo, 182329 é um quadrado perfeito, e a sua raiz quadrada é 427.

Prova. $427 \times 427 = 182329$.

Regra. *I. Para se extrahir a raiz quadrada de um numero, divide-se este numero em classes de dois algarismos cada uma, começando pelas unidades.*

II. Acha-se o maior quadrado perfeito contido na ultima classe, e escreve-se a sua raiz ao lado direito, em fórma de divisor, e será este o primeiro algarismo da raiz do numero. Subtrahe-se o quadrado perfeito daquella classe, e o resto junto com a classe seguinte formará o novo dividendo.

III. Dobra-se a parte da raiz achada, e escreve-se como um divisor indicante ao lado do dividendo; acha-se quantas vezes o divisor é contido no dividendo, excluindo deste o ultimo algarismo da direita, e esse numero junta-se ao primeiro algarismo da raiz e tambem ao divisor.

IV. Multiplica-se agora o divisor completo pelo numero achado, e o producto subtrahe-se do dividendo, e o resto junto com a classe seguinte formará o novo dividendo.

V. Desce-se com o divisor o algarismo dobrado da direita, e continúa-se o processo como acima até todas as classes ficarem divididas.

Nota. Quando um divisor indicante é maior do que o seu respectivo dividendo, escreve-se uma cifra na raiz, outra no divisor e desce-se outra classe para o dividendo, e continua-se a operação. Se houver resto, depois de se achar a raiz da ultima classe, o numero será um quadrado imperfeito, e a sua raiz approximada será um numero fraccionario.

Para se achar a fracção da raiz, juntam-se classes de cifras ao resto, e escreve-se uma virgula decimal no fim da parte inteira da raiz, para se indicar que os algarismos que seguem são decimaes.

Extrahir a raiz quadrada dos seguintes numeros :

1.	$\sqrt{4225}=?$	Resp.	65.	5.	$\sqrt{1444}=?$?
2.	$\sqrt{1521}=?$	»	39.	6.	$\sqrt{3025}=?$?
3.	$\sqrt{7225}=?$	»	85.	7.	$\sqrt{6241}=?$?
4.	$\sqrt{9409}=?$	»	97.	8.	$\sqrt{49284}=?$?

Extracção da raiz quadrada das fracções

306. Desde que o quadrado de uma fracção se obtem quadrando separadamente cada um de seus termos, segue-se que, se os dois termos de uma fracção forem quadrados perfeitos, *a raiz quadrada da fracção se acha extrahindo a raiz quadrada de cada um dos seus termos.*

Problema. Qual é a raiz quadrada de $\frac{9}{16}$?

Solução. $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{3\times3}}{\sqrt{4\times4}} = \frac{3}{4}.$

1. Qual é a raiz quadrada de $\frac{1}{4}$? Resp. $\frac{1}{2}$.
2. Qual é a raiz quadrada de $\frac{25}{36}$? » $\frac{5}{6}$.
3. Qual é a raiz quadrada de $\frac{16}{49}$? » ?
4. Qual é a raiz quadrada de $\frac{64}{81}$? » ?
5. Qual é a raiz quadrada de $\frac{256}{361}$? » ?
6. Qual é a raiz quadrada de $\frac{4096}{61009}$? » ?

Raiz quadrada approximada

307. Para illustrarmos o methodo de achar a raiz quadrada approximada de um quadrado imperfeito, vamos achar a raiz quadrada de 2 com a differença menor de $\frac{1}{3}$.

Reduzindo 2 á fracção cujo denominador seja 9 (quadrado de 3, denominador da fracção $\frac{1}{3}$), teremos $2=\frac{18}{9}$. Ora, a raiz quadrada de 18 é um numero maior do que 4, e menor do que 5; então a raiz quadrada de $\frac{18}{9}$ é maior do que $\frac{4}{3}$ e menor do que $\frac{5}{3}$; portanto, $\frac{4}{3}$ é a raiz approximada de 2 com a differença menor do que $\frac{1}{3}$.

Para acharmos a raiz quadrada de um numero inteiro com uma differença menor do que uma fracção dada, temos a seguinte

Regra. *Multiplica-se o numero dado pelo quadrado do denominador da fracção que determina o grau de approximação, e deste producto extrahe-se a raiz quadrada mais approximada em inteiros, e divide-se pelo denominador da fracção dada.*

Achar a raiz quadrada approximada dos seguintes numeros:

1. De 5 com uma differença menor do que $\frac{1}{5}$. Resp. $2\frac{1}{5}$.
2. De 7 com uma differença menor do que $\frac{1}{13}$. » $2\frac{8}{13}$.
3. De 15 com uma differença menor do que $\frac{1}{23}$. » $3\frac{20}{23}$.
4. De 27 com uma differença menor do que $\frac{1}{30}$. » $5\frac{1}{6}$.
5. De 14 com uma differença menor do que $\frac{1}{10}$. » 3,7.

Extracção da raiz quadrada dos monomios

308. Para acharmos o modo de extrahir a raiz quadrada dos monomios, devemos notar como se fórma o seu quadrado.

Segundo a regra da elevação de um monomio a qualquer potencia, (n.° **271**) vemos que

$$(5a^2b^3c)^2=5a^2b^3c\times 5a^2b^3c=25a^4b^6c^2.$$

Para quadrarmos um monomio, temos de quadrar o seu coefficiente numeral, e depois multiplicar o expoente de cada factor litteral por 2. Então, para acharmos a raiz quadrada de um monomio que seja quadrado perfeito, temos a seguinte regra:

Regra. *Extrahe-se a raiz quadrada do coefficiente numeral, e divide-se o expoente de cada factor litteral por 2.*

Nota. Esta regra só tem applicação quando o monomio é um quadrado perfeito. Quando o monomio é quadrado imperfeito, a sua raiz quadrada póde sómente ser indicada. Assim, a raiz quadrada de é $3ab$ é $\sqrt{3ab}$.

309. Signaes da raiz. Se multiplicarmos $+a$ por $+a$, o producto será $+a^2$; se multiplicarmos $-a$ por $-a$, o producto será tambem $+a^2$. Então a raiz quadrada de $+a^2$ póde ser $+a$ ou $-a$; assim tambem a raiz quadrada de $25a^4b^6c^2$ póde ser $+5a^2b^3c$ ou $-5a^2b^3c$. Daqui concluimos que a raiz quadrada de um monomio positivo, póde ter o signal + ou −, e esta resposta dupla se exprime com o signal dobrado ±; assim, $\sqrt{9a^2}=\pm 3a$, que se lê: A raiz quadrada de $9a^2$ é igual a mais ou menos $3a$.

310. Se um monomio é negativo, não é possivel extrahir a sua raiz quadrada, porque o quadrado de qualquer quantidade positiva ou negativa é sempre positivo. De sorte que $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-4a^2}$, $\sqrt{-b}$, são expressões algebricas, que indicam operações impossiveis, e por isso se denominam **quantidades imaginarias.** Quando, pois, encontrarmos expressões desta natureza nas equações do segundo grau, é porque ha algum absurdo no problema, ou impossibilidade na equação.

Achar a raiz quadrada de cada um dos seguintes monomios:

1. $\sqrt{4a^2x^2}=?$ Resp. $\pm 2ax$.
2. $\sqrt{9x^2y^4}=?$ » $\pm 3xy^2$.
3. $\sqrt{25a^2b^2c^4}=?$ » $\pm 5abc^2$.
4. $\sqrt{36a^4b^6x^2}=?$ » $\pm 6a^2b^3x$.
5. $\sqrt{16m^2n^4y^6}=?$?
6. $\sqrt{49a^2b^4c^2}=?$?
7. $\sqrt{625x^2z^4}=?$?
8. $\sqrt{1156a^2x^4z^6}=?$?

311. Desde que $\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}$, segue-se que $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\pm\frac{a}{b}$, isto é, *para se achar a raiz quadrada de uma fracção monomia, extrahe-se a raiz quadrada de ambos os seus termos.*

9. Achar a raiz quadrada de $\frac{4a^2}{9b^2}$. Resp. $\pm\frac{2a}{3b}$.
10. Achar a raiz quadrada de $\frac{16x^2y^4}{25a^2z^2}$. » ?

Extracção da raiz quadrada dos polynomios

312. Antes de formularmos a regra para a extracção da raiz quadrada dos polynomios, examinemos primeiro a relação que ha entre os varios termos de uma quantidade e o seu quadrado.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$
$$(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2.$$
$$(a+b+c+d)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2.$$

Daqui vemos que o quadrado de qualquer polynomio é formado pela seguinte lei:

313. *O quadrado de qualquer polynomio é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o producto do primeiro termo multiplicado pelo segundo; mais o quadrado do segundo, mais duas vezes os dois primeiros termos multiplicados pelo terceiro; mais o quadrado do terceiro, mais duas vezes os tres primeiros termos multiplicados pelo quarto; mais o quadrado do quarto, e assim por diante.*

I Problema. Qual é a raiz quadrada de $a^2+2ab+b^2$?

Solução. Como os termos desta quantidade se acham já ordenados com relação á lettra a, acharemos a raiz quadrada do 1° termo que é a^2. Ora, a raiz quadrada de a^2 é a, que se escreve á direita como o primeiro termo da raiz. Subtrahindo agora do 1° termo o quadrado desta raiz, nada resta.

Desce-se o resto do polynomio $(2ab+b^2)$ para se operar. Dividindo-se então o 1° termo deste resto pelo dobro da raiz achada, que é $2a$, temos o quociente b que é o segundo termo da raiz. O termo b escreve-se tambem adiante de $2a$, para ser um multiplicador. Multiplicando agora $2a+b$ por b, obtemos $2ab+b^2$ que subtrahido do resto $2ab+b^2$, nada resta. Então, $a+b$ é a raiz quadrada de $a^2+2ab+b^2$.

Operação

	Raiz
$a^2+2ab+b^2$	$a+b$
a^2	
$0+2ab+b^2$	$(2a+b)\times b$.
$2ab+b^2$	
$0 \quad 0$	

II Problema. Qual é a raiz quadrada de $4a^4-12a^3+5a^2+6a+1$?

Operação

	$2a^2-3a-1$ Raiz
$4a^4-12a^3+5a^2+6a+1$	
$4a^4$	
$0-12a^3+5a^2+6a+1$	$(4a^2-3a)\times(-3a)$
$-12a^3+9a^2$	
$0-4a^2+6a+1$	$(4a^2-6a-1)\times(-1)$
$-4a^2+6a+1$	
$0 \quad 0 \quad 0$	

Solução. A raiz quadrada do 1° termo do polynomio é $2a^2$, que será o 1° termo da raiz. Subtrahindo do 1° termo $(4a^4)$ o quadrado da raiz achada $(2a^2\times 2a^2=4a^4)$, nada restará.

O resto do polynomio $(-12a^3+5a^2+6a+1)$ desce-se para ser operado. Dividindo este resto pelo dobro do 1° termo da raiz $(2a^2+2a^2=4a^2)$, o quociente $-3a$ será o segundo termo da raiz, e se escreverá adiante de $4a^2$ para formar um novo divisor. Multiplicando-se agora $4a^2-3a$ por $-3a$, e o producto sendo subtrahido de $-12a^3+5a^2+6a+1$, restará $-4a^2+6a+1$.

Divide-se este resto pelo dobro dos dois termos da raiz, e o quociente -1 será o terceiro termo da raiz.

Junta-se este termo ao dobro dos dois primeiros termos, e tem-se $4a^2-6a-1$; multiplica-se esta quantidade pelo terceiro termo da raiz (-1) e o producto subtrahido de $-4a^2+6a+1$, nada restará. A raiz quadrada é, portanto, $2a^2-3a-1$.

Regra. *I. Ordena-se o polynomio em relação ás potencias decrescentes de uma lettra; então acha-se o primeiro termo da raiz, extrahindo a raiz quadrada do primeiro termo do polynomio, e escreve-se o resultado á direita, e subtrahe-se o seu quadrado da quantidade dada.*

II. Divide-se o primeiro termo do resto pelo dobro da parte da raiz já achada, e o resultado que é o segundo termo da raiz, junta-se ao divisor. Multiplica-se o divisor assim completo pelo segundo termo da raiz, e o producto subtrahe-se do resto.

III. Dobram-se os termos da raiz já achados, para formar um divisor indicante; divide-se o primeiro termo do resto pelo primeiro termo do divisor, e o resultado, que é o terceiro termo da raiz, junta-se ao divisor. Multiplica-se o divisor assim completo pelo terceiro termo da raiz, e o producto subtrahe-se do ultimo resto. E assim se procede até passar por todos os termos do polynomio.

Achar a raiz quadrada dos seguintes polynomios:

		Resp.
1.	x^2+4x+4.	$x+2$.
2.	$4x^2-12x+9$.	» $2x-3$.
3.	$x^2y^2-8xy+16$.	» $xy-4$.
4.	$4a^2x^2-20axyz+25y^2z^2$.	» $2ax-5yz$.
5.	$x^4+4x^3+6x^2+4x+1$.	» ?
6.	$4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$.	» ?

314. Nenhum binomio póde ser quadrado perfeito, porque o quadrado de um monomio é um monomio, e o quadrado de um binomio é um trinomio. Assim, a^2+b^2 não é quadrado perfeito; mas se lhe addicionarmos $2ab$, tornar-se-á o quadrado de $a+b$, e se delle subtrahirmos $2ab$, tornar-se-á o quadrado de $a-b$.

315. Para que um trinomio seja quadrado perfeito, é necessario que os dois termos extremos sejam quadrados perfeitos, e que o termo do meio seja o dobro do producto das raizes quadradas dos termos extremos. De sorte que, para se achar a raiz quadrada de um trinomio que é um quadrado perfeito, *extrahem-se as raizes*

quadradas do primeiro termo e do terceiro, e unem-se com o signal do termo do meio.

Assim, $4a^2-12ac+9c^2$ é um quadrado perfeito, porque $\sqrt{4a^2}=2a$, $\sqrt{9c^2}=\pm 3c$, e $2(2a\times -3c)=-12ac$. Mas $9x^2+12xy+16y^2$ não é quadrado perfeito, porque, embora $\sqrt{9x^2}=3x$, e $\sqrt{16y^2}=4y$, $2(3x\times 4y)$ não é igual a $12xy$.

1. Qual é a raiz quadrada de a^2-2a+1? Resp. $a-1$.
2. Qual é a raiz quadrada de $1+2x+x^2$? » $1+x$.
3. Qual é a raiz quadrada de $x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}$? » $x+\frac{2}{3}$.
4. Qual é a raiz quadrada de $a^2-a+\frac{1}{4}$? » $a-\frac{1}{2}$.

Radicaes do segundo grau

316. Já vimos que, para um monomio ser um quadrado perfeito, é necessario que o seu coefficiente numeral seja um quadrado perfeito, e que o expoente de cada lettra seja exactamente divisivel por 2. Assim $4a^2$ é um quadrado perfeito, emquanto que $5a^3$ não é quadrado perfeito, porque o coefficiente 5 não é quadrado perfeito, e o expoente 3 não é divisivel por 2.

317. As quantidades cuja raiz quadrada não poder ser exactamente determinada, denominam-se **radicaes do segundo grau** ou **quantidades irracionaes**. Assim, $\sqrt{2}$, $a\sqrt{b}$ e $5\sqrt{3}$ são radicaes do segundo grau ou quantidades irracionaes.

318. O coefficiente do radical é o numero ou a lettra que está antes do signal radical. Assim, nas expressões $5\sqrt{3}$ e $a\sqrt{b}$, as quantidades 5 e a são os coefficientes; 5 mostra que o radical $\sqrt{3}$ deve ser tomado 5 vezes, e a mostra que o radical $\sqrt{b}$ deve ser tomado a vezes.

319. Dois radicaes são semelhantes quando as quantidades debaixo do signal radical são iguaes ou as mesmas. Assim, $3\sqrt{2}$ e $7\sqrt{2}$ são radicaes semelhantes; assim tambem $b\sqrt{a}$, $2\sqrt{a}$ e $2b\sqrt{a}$ são radicaes semelhantes.

Reducção de um radical á sua fórma mais simples

320. Os radicaes do segundo grau podem, muitas vezes, ser simplificados, isto é, reduzidos a uma fórma simples, mas com o mesmo valor.

Esta reducção é baseada no seguinte principio :

A raiz quadrada do producto de dois ou mais factores é igual ao producto das raizes quadradas destes factores.

Assim, $\sqrt{144}=\sqrt{9\times 16}=\sqrt{9}\times\sqrt{16}=3\times 4=12$.
Tambem $\sqrt{a^2x}=\sqrt{a^2\times x}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{x}=a\sqrt{x}$.

Problema. Reduzir $\sqrt{4a}$ á sua fórma mais simples.

Solução. $\sqrt{4a}=\sqrt{4\times a}=\sqrt{4}\times\sqrt{a}=2\sqrt{a}$.

Regra. *Decompõe-se o radical em dois factores, de sorte que um delles seja um quadrado perfeito. Extrahe-se a raiz quadrada deste quadrado perfeito, e a raiz prefixa-se como um coefficiente ao outro factor que fica debaixo do signal radical.*

Nota. Um radical fica reduzido á sua fórma mais simples, quando não tem debaixo do signal radical nenhum factor que seja quadrado perfeito,

Para se conhecer se uma quantidade contém um factor numeral que seja quadrado perfeito, vê-se se ella é divisivel por qualquer um dos quadrados perfeitos, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, etc. Se não for divisivel por nenhum delles, não conterá nenhum factor que seja quadrado perfeito, e esta quantidade não poderá ser reduzida.

Reduzir cada um dos seguintes radicaes á sua fórma mais simples :

1.	$\sqrt{8a^2}$.	Resp.	$2a\sqrt{2}$.	6.	$\sqrt{32a^6b^2c^4}$.	Resp.	?
2.	$\sqrt{12a^3}$.	»	$2a\sqrt{3a}$.	7.	$\sqrt{40a^2b^3c^3}$.	»	?
3.	$\sqrt{16a^3b}$.	»	$4a\sqrt{ab}$.	8.	$\sqrt{44a^5b^3c}$.	»	?
4.	$\sqrt{18a^4b^3c^3}$.	»	$3a^2bc\sqrt{2bc}$.	9.	$\sqrt{45a^4b^2c^4}$.	»	?
5.	$\sqrt{20a^3b^3c^3}$.	»	$2abc\sqrt{5abc}$.	10.	$\sqrt{75a^3b^3c^3}$.	»	?

321. Uma fracção radical do segundo grau póde tambem ser reduzida a uma fórma mais simples.

Multiplicam-se os dois termos por uma quantidade que torne o denominador quadrado perfeito; decompõe-se a fracção em dois factores, dos quaes um seja quadrado perfeito; extrahe-se a raiz quadrada deste factor, e prefixa-se ao outro factor que fica debaixo do signal radical.

Problema. Reduzir $\frac{2}{3}$ á sua fórma mais simples.

Solução $\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}\times\frac{3}{3}}=\sqrt{\frac{6}{9}}=\sqrt{\frac{1}{9}\times 6}=\frac{1}{3}\sqrt{6}$.

Reduzir as seguintes fracções radicaes á sua fórma mais simples:

11.	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	Resp.	$\frac{1}{5}\sqrt{15}$.	14.	$\sqrt{\frac{16}{27}}$	Resp.	?
12.	$\sqrt{\frac{7}{8}}$	»	$\frac{1}{4}\sqrt{14}$.	15.	$\sqrt{\frac{11}{18}}$	»	?
13.	$\sqrt{\frac{12}{25}}$	»	$\frac{2}{5}\sqrt{3}$.	16.	$\sqrt{\frac{9}{10}}$	»	?

322. Desde que $a=\sqrt{a^2}$, e $2\sqrt{3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{12}$, é evidente que qualquer quantidade póde ser transformada em um radical do segundo grau, sendo quadrada e posta debaixo do signal radical. Pelo mesmo principio, o coefficiente de um radical póde passar para debaixo do signal radical.

17. Transformar 5 em um radical do 2° grau.

Solução. $5=\sqrt{5\times5}=\sqrt{25}$.

18. Transformar $2a$ em um radical do 2° grau. Resp. $\sqrt{4a^2}$.

19. Exprimir a quantidade $3\sqrt{5}$ com o coefficiente debaixo do signal radical. Resp. $\sqrt{45}$.

20. Passar o coefficiente de $3c\sqrt{2c}$ para debaixo do signal radical. Resp. $\sqrt{18c^3}$.

21. Passar o coefficiente de $5\sqrt{3}$ para debaixo do signal radical. Resp. $\sqrt{75}$.

22. Passar o coefficiente de $4\sqrt{\frac{1}{8}}$ para debaixo do radical. Resp. $\sqrt{2}$.

Addição dos radicaes do segundo grau

323. I Problema. Qual é a somma de $3\sqrt{2}$ e $5\sqrt{2}$?

Solução. E' evidente que 3 vezes mais 5 vezes qualquer quantidade devem fazer 8 vezes essa quantidade. $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.

II Problema. Qual é a somma de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$?

$$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2}+\sqrt{4\times2}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}.$$

Solução. Reduzindo o segundo radical á sua fórma mais simples, e addicionando-o com o primeiro, temos $\sqrt{2}$ ou $1\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

Se os radicaes depois de simplificados apparecerem dessemelhantes, neste caso, só poderemos juntar estas quantidades, pondo o signal de addição entre elles. Assim, a somma de $2\sqrt{3}$ e $5\sqrt{7}$ é $2\sqrt{3}+5\sqrt{7}$.

Regra. *Reduz-se cada radical á sua forma mais simples, e, se os radicaes resultantes forem semelhantes, sommam-se os coefficientes, e a somma prefixa-se ao radical commum; mas, se forem dessemelhantes, juntam-se com o signal da addição.*

Achar a somma dos seguintes grupos de radicaes:

1. $\sqrt{8}$ e $\sqrt{18}$. Resp. $5\sqrt{2}$.
2. $\sqrt{12}$ e $\sqrt{27}$. » $5\sqrt{3}$.
3. $\sqrt{20}$ e $\sqrt{80}$. » $6\sqrt{5}$.
4. $\sqrt{24}$ e $\sqrt{150}$. » $7\sqrt{6}$.
5. $\sqrt{75}$ e $\sqrt{147}$. » $12\sqrt{3}$.

6. $\sqrt{8}$, $\sqrt{32}$ e $\sqrt{50}$. » $11\sqrt{2}$.
7. $\sqrt{40}$, $\sqrt{90}$ e $\sqrt{250}$. » $10\sqrt{10}$.
8. $\sqrt{28x}$ e $\sqrt{63x}$. » $5\sqrt{7x}$.
9. $\sqrt{3ab}$ e $6\sqrt{3ab}$. » $7\sqrt{3ab}$.
10. $\sqrt{75a^2c}$ e $\sqrt{147a^2c}$. » $12a\sqrt{3c}$.

Subtracção dos radicaes do segundo grau

324. I Problema. Subtrahindo $3\sqrt{2}$ de $5\sqrt{2}$, quanto resta?

Solução. E' evidente que 5 vezes uma quantidade menos 3 vezes essa quantidade, é igual a 2 vezes a mesma quantidade. $5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

II Problema. Qual é a differença entre $\sqrt{8}$ e $\sqrt{2}$?

$$\sqrt{8}-\sqrt{2}=\sqrt{4\times2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}.$$

Solução. Reduzindo o radical maior a sua fórma mais simples, e operando a subtracção, vemos que a differença é $\sqrt{2}$.

Se os radicaes são dessemelhantes, é claro que a sua differença póde só ser indicada. Assim, subtrahindo $3\sqrt{a}$ de $5\sqrt{b}$ o resultado é $5\sqrt{b}-3\sqrt{a}$.

Regra. *Reduzem-se os radicaes á sua fórma mais simples, e a differença entre o coefficiente do minuendo e o do subtrahendo prefixa-se ao radical commum.*

Se os radicaes não forem semelhantes, indica-se a sua differença com o signal de subtracção.

Exemplos para resolver:

1. $\sqrt{18}-\sqrt{2}$. Resp. $2\sqrt{2}$.
2. $\sqrt{45a^2}-\sqrt{5a^2}$. » $2a\sqrt{5}$.
3. $\sqrt{54b}-\sqrt{6b}$. » $2\sqrt{6b}$.
4. $\sqrt{112a^2c^2}-\sqrt{28a^2c^2}$. » $2ac\sqrt{7}$.
5. $\sqrt{27b^3c^3}-\sqrt{12b^3c^3}$. » $bc\sqrt{3bc}$.
6. $5a\sqrt{27}-3a\sqrt{48}$. » $3a\sqrt{3}$.
7. $2\sqrt{\frac{3}{4}}-3\sqrt{\frac{1}{3}}$. » 0.
8. $\sqrt{\frac{5}{6}}-\sqrt{\frac{10}{27}}$. » $\frac{1}{18}\sqrt{30}$.

Multiplicação dos radicaes do segundo grau

325. I Problema. Qual é o producto de $\sqrt{a}$ multiplicado por $\sqrt{b}$?

Solução. Desde que $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$, segue-se que $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.

II Problema. Multiplicar $a\sqrt{b}$ por $c\sqrt{d}$.

Solução. $a\sqrt{b}\times c\sqrt{d}=a\times c\times\sqrt{b}\times\sqrt{d}=ac\sqrt{bd}$.

Regra. *Multiplicam-se entre si as quantidades que estão debaixo do signal radical, e o producto escreve-se debaixo do radical.*

Se houver coefficientes, multiplicam-se entre si, e o resultado escreve-se como coefficiente do radical, e reduz-se esta expressão á sua fórma mais simples.

Exemplos para resolver:

1. Multiplicar $\sqrt{6}$ por $\sqrt{8}$.

Solução. $\sqrt{6}\times\sqrt{8}=\sqrt{48}=\sqrt{16\times3}=4\sqrt{3}$.

2. Multiplicar $2\sqrt{14}$ por $3\sqrt{2}$.

Solução. $2\sqrt{14}\times3\sqrt{2}=2\times3\sqrt{14\times2}=6\sqrt{28}=6\sqrt{4\times7}=6\times2\sqrt{7}=12\sqrt{7}$.

		Resp.
3.	Multiplicar $\sqrt{8}$ por $\sqrt{2}$.	4.
4.	Multiplicar $2\sqrt{a}$ por $3\sqrt{a}$.	» $6a$.
5.	Multiplicar $\sqrt{27}$ por $\sqrt{3}$.	» 9.
6.	Multiplicar $3\sqrt{2}$ por $2\sqrt{3}$.	» $6\sqrt{6}$.
7.	Multiplicar $3\sqrt{3}$ por $2\sqrt{3}$.	» 18.
8.	Multiplicar $\sqrt{6}$ por $\sqrt{15}$.	» $3\sqrt{10}$.
9.	Multiplicar $2\sqrt{15}$ por $3\sqrt{35}$.	» $30\sqrt{21}$.
10.	Multiplicar $\sqrt{a^3b^5c}$ por $\sqrt{abc}$.	» a^2b^3c.
11.	Multiplicar $2\sqrt{3ab}$ por $3\sqrt{2ab}$.	» $6ab\sqrt{6}$.
12.	Multiplicar $\sqrt{\frac{1}{2}}$ por $\sqrt{\frac{1}{2}}$.	» $\frac{1}{2}$.

326. Quando dois polynomios tem radicaes do segundo grau, multiplicam-se do mesmo modo que os outros polynomios, observando só a direcção contida na regra precedente, como se vê na operação ao lado. A resposta é $6-\sqrt{5}-5$ que reduzida, dá $1-\sqrt{5}$.

$$\begin{array}{r} 3+\sqrt{5} \\ 2-\sqrt{5} \\ \hline 6+2\sqrt{5} \\ -3\sqrt{5}-5 \\ \hline 6-\sqrt{5}-5 \end{array}$$

		Resp.
13.	Multiplicar $2+\sqrt{2}$ por $2-\sqrt{2}$.	2.
14.	Multiplicar $3+2\sqrt{2}$ por $5-3\sqrt{2}$.	» $3+\sqrt{2}$.
15.	Multiplicar $\sqrt{x+1}$ por $\sqrt{x-1}$.	» $\sqrt{x^2-1}$.
16.	Multiplicar $\sqrt{y+2}$ por $\sqrt{y+2}$.	» $\sqrt{y^2+4y+4}$.

Divisão dos radicaes do segundo grau

327. I Problema. Qual é o quociente de $\sqrt{ab}$ dividido por $\sqrt{a}$.

Solução. Desde que $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, segue-se que $\sqrt{ab}\div\sqrt{a}=\sqrt{\frac{ab}{a}}=\sqrt{b}$.

II Problema. Qual é o quociente de $ac\sqrt{bd}$ dividido por $a\sqrt{b}$?

Solução. Desde que $a\sqrt{b}\times c\sqrt{d}=ac\sqrt{bd}$, segue-se que $ac\sqrt{bd}\div a\sqrt{b}=\frac{ac\sqrt{bd}}{a\sqrt{b}}=\frac{ac}{a}\sqrt{\frac{bd}{b}}=c\sqrt{d}$.

Regra. *Dividem-se as quantidades que estão debaixo do signal radical, e o quociente escreve-se debaixo do signal.*

Se houver coefficientes, dividem-se, e o quociente prefixa-se ao quociente que está debaixo do radical.

Exemplos para resolver:

1. Dividir $8\sqrt{72}$ por $2\sqrt{6}$.

Solução. $\frac{8\sqrt{72}}{2\sqrt{6}}=\frac{8}{2}\sqrt{\frac{72}{6}}=4\sqrt{12}=4\sqrt{4\times3}=8\sqrt{3}$.

		Resp.
2.	Dividir $\sqrt{54}$ por $\sqrt{6}$.	3.
3.	Dividir $6\sqrt{54}$ por $3\sqrt{27}$.	» $2\sqrt{2}$.
4.	Dividir $6\sqrt{28}$ por $2\sqrt{7}$.	» 6.
5.	Dividir $\sqrt{160}$ por $\sqrt{8}$.	» $2\sqrt{5}$.
6.	Dividir $\sqrt{a^3}$ por $\sqrt{a}$.	» a.
7.	Dividir $ab\sqrt{a^3b^3}$ por $b\sqrt{ab}$.	» a^2b.
8.	Dividir $\sqrt{\frac{1}{2}}$ por $\sqrt{\frac{1}{3}}$.	» $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

328. Uma fracção cujo denominador é um monomio ou binomio que contém radicaes do segundo grau, póde ser reduzida a uma fracção equivalente com um denominador racional.

Illustração. Quando uma fracção tem a fórma $\frac{a}{\sqrt{b}}$, multiplicando-se ambos os termos por $\sqrt{b}$, o denominador se tornará racional. Assim,

$$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\times\sqrt{b}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}.$$

Desde que a somma de duas quantidades multiplicadas por sua differença é igual á differença de seus quadrados (n.° [illegible]), segue-se que se a fracção tiver a fórma de $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$, e nós multiplicarmos ambos os termos por $b-\sqrt{c}$, o denominador se tornará racional, porque ficará b^2-c. Assim,

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}} \times \frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}} = \frac{ab-a\sqrt{c}}{b^2-c}.$$

Pela mesma razão, se o denominador for $b-\sqrt{c}$, o multiplicador será $b+\sqrt{c}$; se o denominador for $\sqrt{b}+\sqrt{c}$, o multiplicador será $\sqrt{b}-\sqrt{c}$; e se o denominador for $\sqrt{b}-\sqrt{c}$, o multiplicador será $\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

Regra. *Se o denominador for um monomio, multiplicam-se ambos os termos da fracção pela quantidade radical no denominador; mas, se for um binomio, multiplicam-se ambos os termos pelo binomio dado no denominador com o segundo signal trocado, e o denominador se tornará racional.*

Reduzir as seguintes fracções a outras equivalentes com denominadores racionaes:

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ Resp. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ » $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
3. $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ Resp. $2-\sqrt{3}$.
4. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ » $5+2\sqrt{6}$.

Solução das equações que conteem radicaes

329. Quando em uma equação, uma quantidade desconhecida está debaixo do signal radical, temos de tornar esta quantidade racional para podermos resolver a equação, isto é, temos de fazer desapparecer o signal radical sem alterar a igualdade da equação, para podermos achar o valor da incognita.

Como já vimos na **secção 175**, prop. 5ª, *se duas quantidades iguaes forem elevadas á mesma potencia, os dois resultados serão iguaes.* Então para fazermos desapparecer o signal radical, temos duas direcções:

Primeira direcção. *Quando uma equação contém uma só expressão radical, transpõe-se esta expressão para um dos lados da equação, e os outros termos, para o outro, e depois quadrando os dois membros, faremos desapparecer o signal radical.*

Problema. Qual é o valor de x na equação $\sqrt{x-1}-1=2$?

Solução. Transpondo o termo -1 para a direita, temos $\sqrt{x-1}=3$. Quadrando agora estes dois membros da equação, temos $x-1=9$, ou $x=10$.

E' necessario que o discipulo se recorde que o quadrado de $\sqrt{x-1}$ é $x-1$, isto é, a mesma quantidade sem o signal radical. O quadrado de $\sqrt{3}$ é 3.

Operação

$$\sqrt{x-1}-1=2$$
$$\sqrt{x-1}=2+1=3$$
$$x-1=9$$
$$x=10.$$

Segunda direcção. *Quando ha duas expressões radicaes, é geralmente preferivel escrever uma, de um lado da equação, e a outra, do outro, antes de quadrar os seus membros.*

Problema. Qual é o valor de x na equação $\sqrt{(x-5)}-3=4-\sqrt{x-12}$?

Solução. Transpõe-se o termo -3 para a direita, e depois quadram-se os dois membros, e desapparece o signal radical da esquerda.

O quadrado de $7-\sqrt{x-12}$ é $49-14\sqrt{x-12x}+x-12$ (n.° [illegible]).

Transpondo-se agora o outro radical para a esquerda, e os outros termos para a direita, temos $14\sqrt{x-12}=42$. Como os numeros 14 e 42 são divisiveis por 14, podem ser simplificados, e a equação ficará $\sqrt{x-12}=3$. n.° 175, prop. 4ª). Quadrando agora os dois membros da equação, temos $x-12=9$, ou $x=21$.

Operação

$$\sqrt{x-5}-3=4-\sqrt{x-12}$$
$$\sqrt{x-5}=7-\sqrt{x-12}$$
$$x-5=49-14\sqrt{x-12}+x-12.$$
$$14\sqrt{x-12}=42$$
$$\sqrt{x-12}=3$$
$$x-12=9$$
$$x=9+12=21.$$

Achar o valor de x nas seguintes equações:

1. $\sqrt{x+3}+3=7$. Resp. $x=13$.
2. $x+\sqrt{x^2+11}=11$. » $x=5$.
3. $\sqrt{x}-2=\sqrt{x-8}$. » $x=9$.
4. $x+\sqrt{x^2-7}=7$. » $x=4$.
5. $2+\sqrt{3x}=\sqrt{5x+4}$. » $x=12$.
6. $\sqrt{x+7}=6-\sqrt{x-5}$. » $x=9$.
7. $\sqrt{x+225}-\sqrt{x-424}-11=0$. » $x=1000$.
8. $\sqrt{x^2+8}-x=2$. » $x=1$.
9. $\sqrt{36+x}=18-\sqrt{x}$. » $x=64$.
10. $\sqrt{x+20}=\sqrt{x}+2$. » $x=16$.
11. $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}=\sqrt{a}$ » $x=\frac{5a}{4}$.
12. $\sqrt{8+x}=2\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$. » $x=\frac{1}{3}$.

EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

330. Uma equação de segundo grau é a que tem a quantidade desconhecida elevada ao seu quadrado, isto é, com o expoente 2, como: $x^2=16$, e $x^2+2x=24$. (Vêde n.os **172** a **174**).

331. As equações do segundo grau podem ser incompletas ou completas.

Equações incompletas são as que podem ser reduzidas a dois termos como: $x^2=16$.

Equações completas são as que podem ser reduzidas a tres termos, como: $x^2+2x=24$.

332. Quando uma equação apparece já reduzida ao limite dos seus termos, como as duas equações que acima apresentamos como exemplos, é muito facil conhecer se ella é incompleta ou completa; mas, quando ella apparece muito complicada ou com muitos termos em ambos os membros, o meio mais seguro de conhecel-o é reduzil-a á sua fórma mais simples, isto é, ao seu menor numero de termos. Esta reducção opera-se do mesmo modo que a solução das equações do primeiro grau, pois consiste unicamente em *inteirar os termos fraccionarios da equação, transpol-os, addicional-os e reduzil-os ao menor numero em que a equação póde ser expressa.*

333. Simplifiquemos a seguinte equação para se verificar qual é o menor numero de termos a que ella póde ser reduzida

Equação........	$\frac{x^2}{3}-3+\frac{5x^2}{12}=\frac{7}{24}-x^2+\frac{299}{24}$,
inteirando........	$8x^2-72+10x^2=7-24x^2+299$,
transpondo........	$24x^2+8x^2+10x^2=7+72+299$,
addicionando...............	$42x^2=378$
dividindo por 42.............	$x^2=9$.

Esta equação, depois de reduzida, apresenta só dois termos que são $x^2=9$, e por isso é uma equação incompleta de segundo grau. Se agora generalizarmos esta equação, substituindo o numero 9 pela lettra q, teremos $x^2=q$. Esta expressão ou fórma serve para mostrar o menor numero de termos a que uma equação incompleta póde ser reduzida. De sorte que reduzir uma equação incompleta á fórma $x^2=q$, quer dizer reduzil-a á fórma mais simples em que ella póde ser expressa.

334. Simplifiquemos agora mais a seguinte equação para se reconhecer qual é o limite do numero de seus termos:

Equação.......	$\frac{7x^2}{3}+12+7x=\frac{4x^2}{3}+4x^2+40$,
inteirando........	$7x^2+36+21x=4x^2+12x+120$,
transpondo.......	$7x^2-4x^2+21x-12x=120-36$,
addicionando................	$3x^2+9x=84$,
dividindo por 3.............	$x^2+3x=28$.

Esta equação, depois de reduzida, apresenta 3 termos que são $x^2+3x=28$, e por isso é uma equação completa do segundo grau. Se agora generalizarmos esta equação, substituindo o valor de 3 por $2p$, e o valor de 28 por q, teremos $x^2+2px=q$. Esta expressão mostra o menor numero de termos a que uma equação completa póde ser reduzida. De sorte que reduzir uma equação completa á fórma $x^2+2px=q$, quer dizer exprimil-a na sua fórma mais simples.

335. Do que ficou exposto concluimos que *qualquer equação do segundo grau póde ser reduzida a uma equação incompleta de dois termos com a fórma* $x^2=q$, *ou a uma equação completa de tres termos com a fórma* $x^2+2px=q$.

Solução das equações incompletas do segundo grau

336. Problema I. Qual é o valor de x na equação $5x^2-18=3x^2+14$?

Solução. Equação....................	$5x^2-18=3x^2+14$,
transpondo os termos..........	$5x^2-3x^2=14+18$,
reduzindo..........................	$2x^2=32$,
dividindo por 2.....................	$x^2=16$,
extrahindo a raiz quadrada..........	$x=\pm 4$.

O processo é igual ao de uma equação de primeiro grau; chegando a $x^2=16$, extrahe-se a raiz quadrada de ambos os membros da equação, e ficará $x=\pm 4$.

Como já vimos na secção **309**, o signal $\pm$ que vai prefixo ao numero 4, quer dizer que o valor de x póde ser $+4$ ou -4. Ora como x tem dois valores ou raizes, uma positiva e outra negativa, dá-se á positiva o nome de **primeira raiz**, e representa-se por x'; e á negativa dá-se o nome de **segunda raiz**, e representa-se por x''. De sorte que $x=\pm 4$ tambem póde ser expresso deste modo: $x'=4$, e $x''=-4$, que se lê: *primeira raiz igual a 4, e segunda raiz igual a menos 4.*

337. Em Arithmetica, como se opera sómente com numeros positivos, um quadrado tem só uma raiz, como: $4\times 4=16$. Mas em Algebra, ha tambem quadrados de numeros negativos; assim o quadrado de -4 é $(-4)\times(-4)=16$, porque menos multiplicado por menos dá mais (n.º **73**). Portanto 16 póde ser o quadrado de $+4$ ou de -4. Do que fica exposto, vemos que

1º *Toda a equação incompleta do segundo grau tem duas raizes.*
2º *Estas raizes são numericamente iguaes, mas teem signaes oppostos.*

II Problema. Achar o valor de x na equação de $5x^2+4=49$.

Solução. Transpondo o termo 4, para a direita, a equação ficará $5x^2=49-4$ ou $5x^2=45$. Dividindo os dois membros por 5, temos $x^2=9$, e $x=\pm 3$. Ou $x'=3$ e $x''=-3$.

$$5x^2+4=49$$
$$5x^2=45$$
$$x^2=9$$
$$x=\pm 3.$$

III Problema. Achar o valor de x na equação $\frac{2x^2}{3}+\frac{3x^2}{4}=5\frac{2}{3}$?

Solução. Inteirando a equação, e reunindo os termos semelhantes, temos $17x^2=68$.

Simplificando estes termos, dividindo-os por 17, temos $x^2=4$; então $x=\pm 2$, ou $x'=2$ e $x''=-2$.

$$\frac{2x^2}{3}+\frac{3x^2}{4}=5\frac{2}{3}$$
$$8x^2+9x^2=68$$
$$17x^2=68$$
$$x^2=4$$
$$x=\pm 2.$$

IV Problema. Achar o valor de x na equação $ax^2+b=cx^2+d$.

Solução. Transpondo para a esquerda os termos que tem a lettra x, e factorando estes termos, temos $x^2(a-c)=d-b$. Então $x^2=\frac{d-b}{a-c}$, e x igual á raiz quadrada desta fracção.

$$ax^2+b=cx^2+d$$
$$ax^2-cx^2=d-b$$
$$x^2(a-c)=d-b$$
$$x^2=\frac{d-b}{a-c}$$
$$x=\sqrt{\frac{d-b}{a-c}}.$$

338. Para resolvermos uma equação incompleta do segundo grau, temos a seguinte regra:

Regra. *Reduz-se a equação á fórma $x^2=q$, e depois extrahe-se a raiz quadrada de ambos os membros da equação.*

Achar o valor de x em cada uma das seguintes equações:

1. $x^2-8=28$. Resp. $x=\pm 6$.
2. $3x^2-15=83+x^2$. » $x=\pm 7$.
3. $7x^2-25=4x^2-13$. » $x=\pm 2$.
4. $a^2x^2-b^2=0$. » $x=\pm\frac{b}{a}$.
5. $5x^2-2=8-35x^2$. » $x=\pm\frac{1}{2}$.
6. $\frac{5x^2}{3}+12=\frac{8x^2}{7}+37\frac{2}{3}$. » $x=\pm 7$.
7. $6x^2-48-2x^2=96$. » $x=\pm 6$.
8. $\frac{4x^2+5}{9}=45$. » $x=\pm 10$.
9. $x^2-36=\frac{x^2}{4}+12$. » $x=\pm 8$.
10. $3x^2-200=\frac{x^2}{4}+196$. » $x=\pm 12$.

Resolver os seguintes problemas que produzem equações incompletas do segundo grau:

1. Achar um numero cujos $\frac{2}{3}$ multiplicados pelos seus $\frac{2}{5}$ darão um producto igual a 60.

Solução. Seja x o numero; então...... $\frac{2x}{3}\times\frac{2x}{5}=60=\frac{4x^2}{15}=60$,
inteirando.................. $4x^2=900$,
dividindo por 4............. $x^2=225$,
resposta.................... $x=15$.

2. Multiplicando-se $\frac{1}{3}$ por $\frac{1}{4}$ de certo numero, o producto é 108, qual é o numero? Resp. 36.

3. Qual é o numero cujo quadrado menos 16 é igual á metade do seu quadrado mais 16? Resp. 8.

4. Qual é o numero cujo quadrado menos 54 é igual ao quadrado da sua metade mais 54? Resp. ?

5. Qual é o numero que, sendo dividido por 9, dá o mesmo quociente que 16 dividido pelo numero? Resp. ?

6. Dois numeros estão um para o outro na razão de 3 para 5, e a differença entre os seus quadrados é 64. Quaes são os numeros? Resp. 6 e 10.

Solução. Sejam $3x$ o numero menor, e $5x$ o numero maior. Quadrando estes numeros, e formando a equação, temos $25x^2-9x^2=64$. Resolvida a equação, temos $x=2$. Então o numero menor, que é $3x$, é igual a 6, e o maior igual a 10.

7. Quaes são os numeros que estão na razão de 3 para 4, e a differença entre os seus quadrados é 63? Resp. ?

8. Qual é o numero que, se lhe juntarmos 3, e se delle subtrahirmos 3, o producto desta somma e desta differença será 40?

Solução. $(x+3)(x-3)=40$; $x^2-9=40$, e $x=7$.

9. Um homem perguntou a outro quantos contos de réis tinha no banco, e este respondeu: Se ao quadrado do numero fossem accrescentados 6 contos, eu teria 42. Quantos contos tinha no banco? Resp. 6 contos.

10. Qual é o numero cuja oitava parte, sendo multiplicada pela sua quinta parte, e o producto dividido por 4, dá o quociente igual a 40? Resp. 80.

Solução das equações completas do segundo grau

339. Já vimos no n.° **334** que uma equação completa do segundo grau, estando reduzida, contém sómente tres termos, sendo dois do primeiro membro, e um do segundo, como: $x^2+6x=40$. Ora, como o primeiro membro de uma equação completa é um binomio, precisamos saber accrescentar-lhe mais um termo para o tornar quadrado perfeito.

340. Se elevarmos a quantidade $(x+3)$ ao seu quadrado, teremos $(x+3)^2=x^2+6x+9$ (n.º **96**). Vemos aqui que o quadrado da somma das quantidades $x+3$ é igual ao quadrado da primeira quantidade, que é $x\times x=x^2$; mais duas vezes o producto da primeira quantidade multiplicada pela segunda, que é $2(x\times 3)=6x$; mais o quadrado da segunda quantidade que é $3\times 3=9$. (Vêde n.º **288**).

Se tivermos sómente os dois primeiros termos x^2+6x, e quizermos achar o terceiro termo, será facil determinal-o, porque sendo o segundo termo $(6x)$ producto da primeira quantidade multiplicada pela segunda, tomado duas vezes $2(x\times 3)$, segue-se que uma vez só é $x\times 3$; e neste producto x é a primeira quantidade, e 3 é a a segunda. Ora, como o termo que temos de juntar é o quadrado da segunda quantidade, segue-se que temos de juntar o quadrado de 3, que é $3\times 3=9$. Juntando esse termo, temos x^2+6x+9.

341. Podemos, pois, considerar os dois termos do primeiro membro de uma equação completa do segundo grau como um quadrado a que falta o ultimo termo, para ficar completo.

Problema. Que termo ou quantidade devemos juntar ao binomio x^2+x para o tornar quadrado perfeito ?

Solução. Se o segundo termo x é duas vezes o producto da primeira quantidade multiplicada pela segunda, uma só vez será $\frac{x}{2}$. Ora, neste producto, sendo x um dos factores, o outro deve ser $\frac{1}{2}$, porque $x\times\frac{1}{2}=\frac{x}{2}$. E como o termo que falta é o quadrado da segunda quantidade, segue-se que lhe devemos juntar o quadrado de $\frac{1}{2}$ que é $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. O quadrado perfeito é, portanto, $x^2+x+\frac{1}{4}$.

Regra. *Para se completar um quadrado, accrescenta-se aos dois termos dados o quadrado da metade do coefficiente de x.*

Nota. No problema acima resolvido, o coefficiente de x é 1 subentendido (n.º **23**). A metade de 1 é $\frac{1}{2}$, e o quadrado de $\frac{1}{2}$ é $\frac{1}{4}$. No exemplo precedente, o coefficiente de x é 6, e a metade de 6 é 3, e o quadrado de 3 é 9.

Completar o quadrado nas seguintes expressões :

1. x^2+10x. Resp. $x^2+10x+25$.
2. x^2-12x. » $x^2-12x+36$.
3. x^2+8x. » $x^2+8x+16$.
4. x^2-16x. » ?
5. x^2+3x. » ?
6. x^2-5x. » ?
7. x^2-x. » $x^2-x+\frac{1}{4}$.
8. $x^2+\frac{3x}{2}$. » $x^2+\frac{3x}{2}+\frac{9}{16}$.
9. x^2-11x. » ?
10. $x^2+\frac{4x}{5}$. » ?

Achar as raizes das equações completas

342. Como já sabemos completar o quadrado, resta-nos agora sómente juntar ao segundo membro da equação o mesmo termo ou quantidade que juntamos ao primeiro, afim de conservarmos a igualdade entre estes dois valores, e podermos resolver a equação.

I Problema. Quaes são as raizes da equação $x^2+8x=33$?

Solução. Para completarmos o quadrado no primeiro membro da equação, temos de addicionar-lhe o numero 16 ; e para que a igualdade não fique alterada, temos de addicionar tambem 16 ao segundo membro, e assim ficará a igualdade restabelecida. Extrahindo a raiz quadrada em ambos os membros, achamos que a raiz do 1º membro é $x+4$, e a do 2º é $+7$ ou -7, porque ambas estas raizes dão o quadrado 49. O valor de x apparece finalmente com a fórma de -4 ± 7, isto quer dizer que, se o numero 7 for tomado no sentido positivo, o valor de x será -4 mais $+7=3$; mas se for tomado no sentido negativo, o valor x será -4 mais $-7=-11$. A solução apresenta, portanto, duas respostas ou raizes : uma positiva que é $x'=3$; e a outra negativa que é $x''=-11$.

$$x^2+8x=33$$
$$x^2+8x+16=33+16=49$$
$$x+4=\pm 7$$
$$x=-4\pm 7$$
$$x'=3$$
$$x''=-11.$$

Verifiquemos agora como estas duas raizes satisfazem os valores da equação.

$$(3\times 3)+(8\times 3)=9+24=33.$$
$$(-11\times -11)+8\times(-11)=121-88=33.$$

II Problema. Resolver a equação $x^2-6x=16$.

Solução. Completa-se o quadrado no primeiro membro ; iguala-se depois o segundo membro ; e extrahida finalmente a raiz quadrada, o resultado é $x-3=\pm 5$.

O valor de x é 8 ou -2.

O discipulo fará a verificação.

$$x^2-6x=16$$
$$x^2-6x+9=16+9=25$$
$$x-3=\pm 5$$
$$x'=3+5=8$$
$$x''=3-5=-2.$$

III Problema. Achar o valor de x na equação $3x-5=\frac{7x+36}{x}$.

Solução.
Equação.................. $3x-5=\frac{7x+36}{x}$,
inteirando a equação...... $3x^2-5x=7x+36$,
transpondo os termos...... $3x^2-12x=36$,
dividindo os termos por 3.. $x^2-4x=12$,
completando o quadrado... $x^2-4x+4=16$,
extrahindo as raizes....... $x-2=\pm 4$,
valores de................ $x=2\pm 4$,
$x'=2+4=6$,
$x''=2-4=-2$.

Para resolvermos uma equação completa do segundo grau, temos a seguinte regra :

Regra. *Reduz-se a equação á forma $x^2+2px=q$; acha-se depois o quadrado da metade do coefficiente do segundo termo, e junta-se a ambos os membros da equação.*

Extrahe-se a raiz quadrada de ambos os membros, e transpõe-se o termo conhecido para o segundo membro.

Resolver cada uma das seguintes equações completas do segundo grau :

1.	$x^2+8x=20.$	Resp.	$x=2$ ou $-10.$
2.	$x^2+16x=80.$	»	$x=4$ ou $-20.$
3.	$x^2+7x=78.$	»	$x=6$ ou $-13.$
4.	$x^2+3x=28.$	»	$x=4$ ou $-7.$
5.	$x^2-10x=24.$	»	$x=12$ ou $-2.$
6.	$x^2-8x=20.$	»	$x=10$ ou $-2.$
7.	$x^2-5x=6.$	»	$x=6$ ou $-1.$
8.	$x^2-21x=100.$	»	$x=25$ ou $-4.$
9.	$x^2+6x=-8.$	»	$x=-2$ ou $-4.$
10.	$x^2+4x=-3.$	»	$x=-1$ ou $-3.$
11.	$x^2-6x=-8.$	»	$x=4$ ou $2.$
12.	$x^2-8x=-15.$	»	$x=5$ ou $3.$
13.	$x^2-10x=-21.$	»	$x=7$ ou $3.$
14.	$x^2-15x=-54.$	»	$x=9$ ou $6.$
15.	$3x^2-2x+123=256.$	»	$x=7$ ou $-\frac{19}{3}.$
16.	$2x^2-5x=12.$	»	$x=4$ ou $-\frac{3}{2}.$
17.	$2x^2+3x=65.$	»	$x=5$ ou $-\frac{13}{2}.$
18.	$\frac{2x^2}{3}-\frac{5x}{2}=\frac{2}{3}.$	»	$x=4$ ou $-\frac{1}{4}.$
19.	$\frac{x^2}{100}=x-24.$	»	$x=60$ ou $40.$
20.	$x^2-x-40=170.$	»	$x=15$ ou $-14.$
21.	$x^2=\frac{6-x}{2}.$	»	$x=\frac{3}{2}$ ou $-2.$
22.	$x-1+\frac{2}{x-4}=0.$	»	$x=3$ ou $2.$
23.	$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{x}{4}+\frac{3}{2}.$	»	$x=2$ ou $4.$
24.	$3x^2+5x=2.$	»	$x=\frac{1}{3}$ ou $-2.$

Resolver os seguintes problemas que produzem equações completas do segundo grau :

I Problema. Qual é o numero cujo quadrado sommado com 15, dá um resultado igual a 8 vezes esse numero ?

Solução. Seja x o numero ; então temos :

Equação....................	$x^2+15=8x,$
transpondo os termos........	$x^2-8x=-15,$
completando o quadrado.....	$x^2-8x+16=16-15=1,$
extrahindo a raiz quadrada........	$x-4=\pm 1,$
valores da incognita...............	$x'=5,$
	$x''=3.$

II Problema. Dividir o numero 24 em duas partes, de sorte que o producto dessas partes seja 95.

Solução. Seja $x=$ a um dos numeros ; então $24-x=$ ao outro.

Equação......................	$x(24-x)=95,$
tirando o parenthesis........	$24x-x^2=95,$
mudando os signaes..........	$x^2-24x=-95,$
	$x=5,$
	$24-x=19.$

III Problema. Um fazendeiro comprou certo numero de carneiros por 80$; se elle tivesse comprado o mesmo numero e mais 4 carneiros pelos mesmos 80$, o preço de cada carneiro seria 1$ menos. Quantos carneiros comprou ?

Solução. Seja x o numero dos carneiros, então $\frac{80\$}{x}$ é o preço que custou cada carneiro ; e $\frac{80\$}{x+4}$ o preço que custaria se elle comprasse mais 4. A differença dos dois preços deve ser igual a 1$000.

Então $\frac{80\$}{x}-\frac{80\$}{x+4}=1\$$. Resolvida esta equação, achamos que o valor de x é 16, numero de carneiros que o fazendeiro comprou.

4. Achar o numero cujo quadrado addicionado com 6 vezes o numero dará 55. Resp. 5.

5. Achar um numero de cujo quadrado subtrahindo 6 vezes o mesmo numero, restará 7. Resp. 7.

6. Achar o numero cujo dobro do quadrado mais 3 vezes o numero dará 65. Resp. 5.

7. Achar dois numeros taes que a sua differença seja 6, e o seu producto seja 160. Resp. 10 e 16.

8. Achar dois numeros cuja somma seja 23, e cujo producto seja 132. Resp. 11 e 12.

9. Dividir o numero 50 em duas partes, de sorte que o seu producto seja 544. Resp. ?

10. Dividir o numero 30 em duas partes, de sorte que o seu producto possa ser igual a oito vezes a sua differença. Resp. 6 e 24.

11. Perguntando-se a um menino que estudava Algebra, qual era a sua idade, elle respondeu: Se do quadrado da minha idade subtrahirdes $\frac{3}{8}$ da minha idade, o resultado será 250 annos. Quantos annos tinha o menino ? Resp. 16 annos.

12. Um professor dividiu 144 laranjas pelos seus discipulos; se houvesse mais dois alumnos, cada um delles teria recebido uma laranja de menos. Qual era o numero de discipulos ? Resp. 16.

Fórmas da equação completa do segundo grau

343. Já sabemos reduzir uma equação completa do segundo grau a fórma $x^2+2px=q$ (n.º 334); já sabemos tambem completar o quadrado sem desfazer a igualdade dos dois membros da equação (n.º 340); já sabemos finalmente achar as duas raizes da equação (n.º 242); resta agora sabermos distinguir as diversas fórmas em que apparece esta equação. E' esse o ponto que agora vamos estudar.

344. Se examinarmos com attenção os exercicios 1°, 5°, 9° e 12° da pagina 158, notaremos que as equações destes exercicios apresentam fórmas differentes como podemos verificar, pondo-as em uma ordem seguida.

1° exercicio, $x^2+8x=20$,	Resp.	$x=2$ ou -10.
5° exercicio, $x^2-10x=24$,	»	$x=12$ ou -2.
9° exercicio, $x^2+6x=-8$,	»	$x=-2$ ou -4.
12° exercicio, $x^2-8x=-15$.	»	$x=5$ ou 3.

345. Nestes quatro exercicios vemos que uma equação completa do segundo grau não tem uma só fórma, mas póde apparecer de quatro fórmas diversas assim generalizadas:

1° exercicio $=x^2+2px=q$,	**1ª fórma;**
5° exercicio $=x^2-2px=q$,	**2ª fórma;**
9° exercicio $=x^2+2px=-q$,	**3ª fórma;**
12° exercicio $=x^2-2px=-q$,	**4ª fórma.**

346. Os caracteristicos que distinguem estas fórmas são os seguintes: O termo x^2 é sempre positivo em todas as fórmas, mas os termos $2px$ e q são ambos positivos na 1ª fórma; o primeiro é negativo e outro positivo na 2ª fórma; o primeiro é positivo e outro negativo na 3ª fórma, e finalmente ambos são negativos na 4ª fórma.

347. Daqui concluimos que *toda a equação completa do segundo grau póde ser reduzida á fórma* $x^2+2px=q$, *na qual os termos* $2px$ *e* q *podem ser ambos quantidades positivas ou negativas, ou um ser positivo e o outro negativo.*

348. As fórmas de uma equação completa podem tambem ser distinguidas pelo resultado da solução, isto é, pelas suas raizes. Assim, a 1ª fórma tem a raiz positiva numericamente menor do que a negativa; a 2ª fórma tem a raiz positiva numericamente maior do que a negativa; a 3ª fórma tem ambas as raizes negativas, e a 4ª tem ambas as raizes positivas.

349. Vamos agora achar as raizes das diversas fórmas de uma equação completa do segundo grau.

Problema. Qual é o valor de x na equação $x^2+2px=q$?

Solução. Para resolvermos esta equação, temos de completar o quadrado do primeiro membro, juntando o quadrado da metade do coefficiente de x (n.ºs 340 e 341). Ora o coefficiente de x é $2p$ (n.º 334); a metade de $2p$ é p, e o quadrado de p é p^2. Juntando p^2 ao primeiro membro, temos de juntal-o tambem ao segundo para conservar a igualdade da equação.

A equação é pois..............	$x^2+2px=q$,
completando o quadrado.......	$x^2+2px+p^2=q+p^2$,
extrahindo a raiz quadrada.....	$x+p=\pm\sqrt{q+p^2}$,
Primeira raiz................	$x'=-p+\sqrt{q+p^2}$,
Segunda raiz................	$x''=-p-\sqrt{q+p^2}$.

Nota. Uma equação do primeiro grau com uma só quantidade desconhecida tem uma só raiz ou resposta, como ficou demonstrado na secção 220; uma equação incompleta do segundo grau tem duas raizes, sendo uma positiva e a outra negativa (n.º 342), e uma equação completa do segundo grau tem tambem duas raizes, podendo ambas ser positivas ou negativas, ou uma positiva e a outra negativa (n.º 348).

Se uma raiz é positiva e outra negativa, a positiva chama-se *primeira raiz*, e a negativa, *segunda raiz* (n. 336); mas se ambas são positivas ou negativas, a primeira que se acha, chama-se *primeira raiz*, e a outra, *segunda raiz*, e distinguem-se tambem por x' e x''.

350. Resolvendo agora as outras fórmas como resolvemos a primeira, obteremos as seguintes raizes:

(1ª)	$x^2+2px=q$.	Raiz	$x=-p\pm\sqrt{q+p^2}$.
(2ª)	$x^2-2px=q$.	»	$x=+p\pm\sqrt{q+p^2}$.
(3ª)	$x^2+2px=-q$.	»	$x=-p\pm\sqrt{-q+p^2}$.
(4ª)	$x^2+2px=-q$.	»	$x=+p\pm\sqrt{-q+p^2}$.

Achar as raizes de uma equação completa por meio da sua fórma generalizada

I Problema. Quaes são as raizes da equação $x^2+8x=20$?

Solução. Esta equação tem a primeira fórma, e a raiz desta fórma é $x=-p\pm\sqrt{p+q^2}$ (n.º 350). Vemos nos dados do problema, que $q=20$, $p=\frac{8}{2}=4$, e $p^2=4\times4=16$. Substituindo agora estas lettras pelos seus respectivos valores, temos

$$x=-4\pm\sqrt{20+16=36}$$
$$x=-4\pm6\text{, isto é, }+2\text{ ou }-10.$$

II Problema. Quaes são os valores de x na equação $x^2-10x=24$?

Solução. Esta equação tem a segunda fórma, e a raiz desta fórma é $x=+p\pm\sqrt{q+p^2}$ (n.º 350). Nos dados do problema, vemos que $q=24$, $p=\frac{10}{2}=5$, e $p^2=5\times5=25$. Substituindo agora, nesta raiz, estas lettras pelos seus respectivos valores, temos

$$x=+5\pm\sqrt{24+25=49}$$
$$x=+5\pm7\text{, isto é }+12\text{ ou }-2.$$

As raizes das outras fórmas acham-se do mesmo modo.

Os discipulos devem agora resolver por este processo todos os exercicios das paginas 158.

Propriedades das equações completas do segundo grau

351. Já vimos na **secção 349** que a fórma $x^2+2px=q$ tem duas raizes que são

$$\begin{array}{ll} 1^a \text{ raiz} & -p+\sqrt{q+p^2} \\ 2^a \text{ raiz} & -p-\sqrt{q+p^2} \\ \hline & -2p \end{array}$$

Sommando estas duas raizes, temos $-2p$, isto é, o coefficiente de x com o signal trocado. Daqui estabelecemos a

1ª Propriedade. *Em uma equação do segundo grau, a somma das duas raizes é igual ao coefficiente do segundo termo com o signal trocado.*

352. Se multiplicarmos as duas raizes, o producto será $p^2-(q+p^2)$, tirando o parenthesis, ficará p^2-q-p^2, isto é, $-q$. Ora $-q$ é o termo conhecido do segundo membro com o signal contrario. Daqui podemos estabelecer a

$$\begin{array}{lr} -p+\sqrt{q+p^2} & 1^a \text{ raiz} \\ -p-\sqrt{q+p^2} & 2^a \text{ raiz} \\ \hline p^2-p\sqrt{q+p^2} & \\ +p\sqrt{q+p^2}-(q+p^2) & \\ \hline p^2 \ldots\ldots\ldots -(q+p^2) & \end{array}$$

2ª Propriedade. *Em uma equação do segundo grau, o producto das duas raizes é igual ao termo conhecido do segundo membro com o signal contrario.*

353. Estas duas propriedades são de grande importancia, porque se a somma das duas raizes dá o coefficiente de x, e o producto dá o segundo membro, podemos facilmente formar ou achar qualquer equação completa por meio sómente das suas raizes.

Exemplo. As raizes de uma equação são $+4$ e -5; qual é a equação ?

Solução. Para formar esta equação, precisamos achar o coefficiente de x, e o valor do termo do segundo membro. Ora a somma das duas raizes $+4$ e -5 é -1, com o signal contrario é $+1$; portanto o coefficiente de x é $+1$. O producto das duas raizes $+4$ e -5 é -20, com o signal contrario fica $+20$; portanto o termo do segundo membro é $+20$, e a equação é $x^2+1x=20$ ou $x^2+x=20$.

Para se formar uma equação, sendo dadas as suas raizes, temos a seguinte regra :

Regra. *A somma das raizes com o signal contrario dará o coefficiente de* x.

O producto das raizes com o signal contrario dará o termo do membro seguinte.

Formar as seguintes equações :

1. Qual é a equação que tem as raizes $+9$ e -10 ? Resp. $x^2+x=90$
2. Formar uma equação, sendo dadas as raizes $+6$ e -10. Resp. $x^2+4x=60$.
3. Se as raizes de uma equação são $+8$ e -2, qual é a equação ? Resp. $x^2-6x=16$.
4. Qual é a equação cujas raizes são -6 e -7 ? Resp. $x^2+13x=-42$.

354. 3ª Propriedade. *Uma equação do segundo grau póde ser transformada em uma expressão trinomia que se póde decompor em dois factores binomios, dos quaes o primeiro termo de cada um é* x, *e o segundo, uma das raizes com o signal contrario.*

Illustremos esta propriedade. Se tomarmos qualquer equação completa do segundo grau, por exemplo, a equação $x^2+8x=20$, e transpozermos o termo 20 para o primeiro membro, teremos $x^2+8x-20=0$.

Este resultado constitue uma equação trinomia do segundo grau, que tem a propriedade de se decompor em dois factores binomios, sendo um factor x e a raiz $+2$ com o signal contrario, que fica $(x-2)$; e o outro factor x e a raiz -10 com o signal contrario, que fica $(x+10)$. Os dois factores são pois $(x-2)$ e $(x+10)$; pois $(x-2)(x+10)=x^2+8x-20$. Indaguemos agora como poderemos achar as raizes -2 e $+10$ sem resolver a equação $x^2+8x=20$.

Já vimos que a somma das duas raizes dá o coefficiente de x com o signal contrario, e que o producto das mesmas raizes dá o termo conhecido do segundo membro com o signal contrario, ou o terceiro termo do trinomio com o mesmo signal. Ora, se procurarmos dois numeros cujo producto seja igual a -20, teremos -4 e 5 ou -2 e 10. Os dois primeiros, como não sommam algebricamente 8, não servem para o caso; os dois ultimos, como sommam algebricamente 8, são os numeros ou raizes requeridas, porque $(-2)\times(+10)=-20$; e tambem $(-2)+(+10)=+8$.

Para se decompôr uma equação trinomia em dois factores binomios, temos a seguinte regra :

Regra. *Acham-se dois numeros cuja somma algebrica seja igual ao coefficiente de* x, *e cujo producto seja igual ao terceiro termo do trinomio.*

Depois a lettra x *com um dos numeros será um factor, e a lettra* x *com o outro numero será o outro factor.*

Decompôr as seguintes expressões :

1. Achar os factores de x^2+6x+8. Resp. $(x+2)(x+4)$.
2. Decompôr a expressão $x^2+6x-27$ em seus factores binomios. Resp. $(x-3)(x+9)$.
3. Decompôr a expressão $x^2-2x-24$ em seus factores binomios. Resp. $(x-6)(x+4)$.
4. Achar os factores da expressão x^2-x-42. Resp. ?

Equações do segundo grau contendo duas quantidades desconhecidas

355. Para resolver uma equação do segundo grau contendo duas quantidades desconhecidas, temos de eliminar uma dellas, afim de obtermos uma equação simples, com uma só quantidade desconhecida.

I Problema. Achar os valores de x e y nas equações $x-y=2$ e $x^2+y^2=100$.

Solução. O valor de x na (1ª) equação é $x=2+y$ ou $y+2$. Quadrando este valor, temos $(y+2)^2=y^2+4y+4$. Substituindo agora na (2ª) equação a quantidade x^2 pelo seu valor, temos a (3ª) equação; simplificando-a, temos a (4ª). Dividindo os seus termos por 2, temos a (5ª). Subtrahindo agora 1 em ambos os membros para tornar o primeiro membro quadrado perfeito, temos a (6ª). Extrahida a raiz quadrada de ambos os membros, segue-se o processo já conhecido, que dá $y=6$ ou -8, e $x=8$ ou -6.

$$x-y=2 \quad (1^a)$$
$$x^2+y^2=100 \quad (2^a)$$
$$y^2+4y+4+y^2=100 \quad (3^a)$$
$$2y^2+4y+4=100 \quad (4^a)$$
$$y^2+2y+2=50 \quad (5^a)$$
$$y^2+2y+1=49 \quad (6^a)$$
$$y+1=\pm 7$$
$$y=-1\pm 7, \text{ isto é, } 6 \text{ ou } -8$$
$$x=y+2=8 \text{ ou } -6.$$

II Problema. Qual é o valor de x e y nas equações $x+y=8$ e $xy=15$?

Solução. O valor de x na (1ª) equação é $x=8-y$; substituindo agora na (2ª) equação a lettra x pelo seu valor $8-y$, temos a (3ª) equação que, sem parenthesis, dá a (4ª). Mudando o lugar e os signaes dos termos, temos a (5ª). Resolvida esta equação, como aprendemos na secção 242, segue-se o processo já conhecido, que dá $y=5$ ou 3 e $x=3$ ou 5.

$$x+y=8 \quad (1^a)$$
$$xy=15 \quad (2^a)$$
$$(8-y)y=15 \quad (3^a)$$
$$8y-y^2=15 \quad (4^a)$$
$$y^2-8y=-15 \quad (5^a)$$
$$y=5 \text{ ou } 3$$
$$x=3 \text{ ou } 5.$$

III Problema. Qual é o valor de x e y nas equações $x^2+y^2=164$, e $xy=80$?

Solução. Multiplicando a (2ª) equação por 2, e sommando-a depois com a (1ª), temos a (3ª) equação, que são dois quadrados perfeitos. Extrahindo a raiz quadrada de ambos os membros, achamos que o valor de x é $18-y$.

Substituindo agora na (2ª) equação a lettra x pelo seu valor, temos a (4ª) equação que, tirado o parenthesis e mudados os termos, se transforma na (5ª).

Resolvida esta equação (n.º 342), achamos que os valores de y são 10 e 8, ou os de x, 8 ou 10.

$$x^2+y^2=164 \quad (1^a)$$
$$xy=80 \quad (2^a)$$
$$\left.\begin{array}{r} 2xy=160 \\ x^2+y^2=164 \end{array}\right\}$$
$$x^2+2xy+y^2=324 \quad (3^a)$$
$$x+y=18$$
$$x=18-y$$
$$(18-y)y=80 \quad (4^a)$$
$$y^2-18y=-80 \quad (5^a)$$

Achar o valor de x e y nas seguintes equações:

1.	$x+y=16.$	Resp.	$x=9$ ou 7.
	$xy=63.$	»	$y=7$ ou 9.
2.	$x-y=5.$	»	$x=9$ ou -4.
	$xy=36.$	»	$y=4$ ou -9.
3.	$x+y=9.$	»	$x=7$ ou 2.
	$x^2+y^2=53.$	»	$y=2$ ou 7.
4.	$x-y=5$	»	$x=8$ ou -3.
	$x^2+y^2=73.$	»	$y=3$ ou -8.
5.	$x+y=11$	»	$x=6$.
	$x^2-y^2=11.$	»	$y=5$.
6.	$x^2+y^2=34$	»	$x=\pm 5$.
	$x^2-y^2=16.$	»	$y=\pm 3$.

O discipulo deve agora resolver os seguintes problemas que produzem equações do segundo grau com duas incognitas:

1. A somma de dois numeros é 10, e a somma dos seus quadrados é 52; quaes são os numeros? Resp. 4 e 6.

2. A differença de dois numeros é 3, e a differença dos seus quadrados é 39; quaes são os numeros? Resp. ?

3. Dividir o numero 25 em duas partes, de sorte que a somma dos quadrados dessas partes seja 425; quaes são as partes? Resp. ?

4. Dividir o numero 10 em duas partes, de sorte que o producto dessas partes exceda 22 á sua differença. Resp. 6 e 4.

5. A somma de 6 vezes o maior de dois numeros, e 5 vezes o menor é 50, e o seu producto é 20; quaes são os numeros? Resp. 5 e 4.

6. A somma do quadrado de dois numeros é 13, e a differença desses quadrados é 5; quaes são os numeros? Resp. ?

7. A differença de dois numeros multiplicada pelo maior é $=16$, mas multiplicada pelo menor é $=12$; quaes são os numeros? Resp. 8 e 6.

8. Achar dois numeros cujo producto seja 54, e o quociente do maior dividido pelo menor seja 6. Resp. ?

9. A somma dos quadrados de dois numeros é a, e a differença desses quadrados é b; quaes são os numeros? Resp. $\sqrt{\frac{a+b}{2}}$ e $\sqrt{\frac{a-b}{2}}$.

10. Achar dois numeros que estejam um para o outro, assim como 3 está para 4, e a somma dos seus quadrados seja 400? Resp. 12 e 16.

Equações biquadradas

356. Uma equação que apenas tem a segunda e a quarta potencia da incognita com a quantidade conhecida relativa ao seu valor, chama-se **equação biquadrada**; assim $x^4+4x^2=32$ e $x^4-13x^2=-36$ são duas equações biquadradas.

A palavra **biquadrada** quer dizer duas vezes quadrada, ou um quadrado de um quadrado, que vem a ser a quarta potencia de uma quantidade; assim o biquadrado de 2 é $2^2\times 2^2=4\times 4=16$; do mesmo modo o biquadrado de a é $a^2\times a^2=a^4$.

Ha varios modos de resolver uma equação biquadrada, mas o mais simples e facil é substituir as potencias x^2 e x^4 da incognita por y e y^2, no que fica o resultado reduzido logo a uma equação do segundo grau; e depois resolve-se esta equação, como já aprendemos no numero **342**.

Problema. Achar o valor de x na seguinte equação biquadrada: $x^4-10x^4=96$.

Solução. Substituindo nesta equação as potencias de x^2 e x^4 por y e y^2

temos .... $y^2-10y=96$,
quadrando a equação... $y^2-10y+25=96+25$,
extrahindo a raiz quadrada... $y-5=\pm 11$,
valor de y..................... $y=\pm 11+5$,
ou.............................. $y=16$ ou -6.
Como $y=x^2$, segue-se que.... $x^2=16$ ou -6.
$x=4$ ou $\sqrt{-6}$.

Podemos facilmente verificar a exactidão deste resultado, substituindo as duas potencias da incognita pelos seus respectivos valores:

$$x^4=4^4=256;\ 10x^2=10\ (4^2)=160;\ \text{então}\ 256-160=96.$$

Observação. Como vimos nesta solução, x tem duas raizes ou valores: o positivo 4, e o negativo $\sqrt{-6}$; mas como já tratámos com toda a clareza das duas raizes no numero **342**, aqui só elucidaremos o processo da solução com o valor positivo, afim de não repetirmos o ensino já exposto.

357. As equações que não forem biquadradas, mas tiverem as duas potencias da incognita de modo que o grau da potencia maior seja o dobro do da menor, poderão tambem ser resolvidas por este processo.

Problema. Achar o valor positivo de x na equação $x^6-7x^3=8$.

Solução. Substituindo x^3 e x^6 por y e y^2, temos a seguinte equação do segundo grau: $y^2-7y=8$. Resolvendo esta equação, como fizemos no problema precedente, temos $y=8$. Ora como $y=x^3$, segue-se que $x^3=8$, e $x=2$.

Verificação. Desde que $x^6=2^6=64$, e $7x^3=7\ (2^3)=56$, segue-se que $64-56=8$.

Regra. *Para se resolver uma equação biquadrada, substituem-se as potencias* $\boldsymbol{x^2}$ *e* $\boldsymbol{x^4}$ *da incognita por* $\boldsymbol{y}$ *e* $\boldsymbol{y^2}$*, procede-se depois como uma equação do segundo grau, e na raiz considera-se* $\boldsymbol{y=x^2}$.

Resolver as seguintes equações dando só o valor positivo de x.

1.	$x^4-8x^2=9$.	Resp. $x=3$.
2.	$x^4+6x^2=135$.	» $x=3$.
3.	$x^4-6x^2=160$.	» $x=4$.
4.	$x^6-8x^3=513$.	» $x=3$.
5.	$x^4+4x^2=12$.	» $x=\sqrt{2}$.
6.	$x^4-13x^2=-36$.	» $x=3$.

RAZÃO E PROPORÇÃO

358. Razão em Algebra é a relação que ha entre duas quantidades da mesma especie, quando ellas são comparadas na sua grandeza ou no seu valor numerico.

De dois modos podemos comparar duas quantidades homogeneas:

O primeiro modo é achar quanto a quantidade maior excede a menor.

O segundo modo é achar quantas vezes a quantidade menor está contida na maior.

Illustremos este ponto. Se compararmos o numero 12 com o numero 4, pelo primeiro modo, acharemos que 12 excede 8 ao numero 4, porque $12-4=8$. Este modo de comparar chama-se razão por differença ou simplesmente **differença**, porque se effectua por meio de uma subtracção.

Se compararmos o numero 12 com o numero 4, pelo segundo modo, acharemos que 12 contém 3 vezes o numero 4, porque $12\div 4=3$. Este modo de comparar chama-se razão por quociente ou simplesmente **razão**, porque se effectua por meio da divisão. E' deste ultimo que agora vamos tratar.

359. As duas quantidades comparadas chamam-se termos da comparação. O primeiro termo chama-se **antecedente**, o segundo **consequente**, e o resultado da comparação chama-se **razão**.

A unidade geralmente adoptada como termo de comparação é o segundo termo; de sorte que, para acharmos a razão que ha entre duas quantidades homogeneas, temos de dividir o antecedente pelo consequente. Assim a razão de 6 para 2 é $\frac{6}{2}$ ou 3, isto é, 6 contém 3 vezes o numero 2. A razão de 2 para 6 é $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$, isto é, 2 contém $\frac{1}{3}$ de 6.

360. Para indicarmos uma razão, escreveremos o antecedente e depois o consequente separados por dois pontos, como $12:4=3$ que se lê: *a razão de 12 para 4 é igual a 3*; $a:b=c$ que se lê: *a razão de a para b é igual a c*.

361. Uma razão é uma simples divisão, na qual o antecedente é o dividendo, o consequente é o divisor, e a razão é o quociente, como $12:4=\frac{12}{4}=3$. Uma razão está, portanto, sujeita ás leis da divisão, expressas nos theoremas das paginas 58 e 59; e por isso «*se multiplicarmos ou dividirmos ambos os termos de uma razão por um mesmo numero, não alteraremos o valor da razão, isto é, do resultado da divisão.*

362. A razão entre duas quantidades póde ser um numero inteiro, mixto ou fraccionario, como succede com um quociente.

1° Problema. Qual é a razão de $15a$ para $3a$?

Solução. $15a:3a=\frac{15a}{3a}=5$.

2° Problema. Qual é a razão de $16x^2$ para $20x$?

Solução. $16x^2:20x=\frac{16x^2}{20x}=\frac{4x}{5}$.

Regra. *Para se achar a razão entre duas quantidades homogeneas, divide-se o antecedente pelo consequente, e o quociente será a razão.*

Exemplos para resolver:

1. Qual é a razão de $6x^2$ para $2x$? Resp. $3x$.
2. Qual é a razão de $15x$ para 3? » $5x$.
3. Qual é a razão de $20x$ para $5x$? » 4.
4. Qual é a razão de $2a^2$ para $4a$? » $\frac{a}{2}$.
5. Qual é a razão de 26$ para 13$? » ?
6. Qual é a razão de $18abc$ para $6ab$? » ?
7. Qual é a razão de x^2-y^2 para $x+y$? » ?
8. Qual é a razão de $27abc^2d$ para $9c^2$? » ?

363. Uma **razão composta** é o producto de duas ou mais razões.

Assim $\left.\begin{matrix}8:4\\12:3\end{matrix}\right\}=8$ é uma razão composta das razões $8:4$ e $12:3$.

Problema. Qual é a razão de $8:4$ e de $12:3$?

Solução. Escreve-se uma razão debaixo da outra; depois multiplicam-se os antecedentes, e o producto é $8\times12=96$; multiplicam-se tambem os consequentes e o producto é $4\times3=12$. A razão resultante é pois $96:12=\frac{96}{12}=8$.

$$\left.\begin{matrix}8:4\\12:3\end{matrix}\right\}=$$
$$8\times12:4\times3$$
$$96:12=8.$$

Regra. *Para se achar o resultado de duas ou mais razões, multiplicam-se os antecedentes, e o mesmo se faz com os consequentes, e depois acha-se a razão dos dois productos.*

1. Qual é a razão composta de $8:15$ e de $25:30$? Resp. ?
2. Qual é a razão composta de $a:b$ e de $2b:3ax$? » ?
3. Qual é a razão composta de $ab:b$ e de $bc:bd$? » ?
4. Reduzir a razão de $99:77$ aos seus menores termos. » $9:7$.

Proporções

364. Uma **proporção** é uma igualdade entre duas razões. Assim, $a:b=c:d$ é uma proporção que mostra que a razão de a para b é igual a razão de c para d, isto quer dizer que o quociente de a dividido por b é igual ao quociente de c dividido por d.

O signal da igualdade entre duas razões é quatro pontos $::$, como $a:b::c:d$, que se lê: *a está para b, assim como c está para d.*

365. Da definição apresentada conclue-se que, se quatro quantidades estiverem em proporção, a primeira dividida pela segunda será igual á terceira dividida pela quarta; de sorte que a proporção $a:b::c:d$ póde ser transformada na equação

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Nota. As palavras *razão e proporção* são muitas vezes confundidas uma com a outra na linguagem commum; assim diz-se que duas quantidades estão na proporção de 3 para 4, em vez de *na razão* de 3 para 4. A razão existe entre duas quantidades, e a proporção só existe entre quatro. São necessarias duas razões iguaes para formar uma proporção.

366. As quatro quantidades que formam uma proporção, chamam-se **termos da proporção,** e teem a seguinte ordem:

1º termo		2º termo		3º termo		4º termo
a	:	b	::	c	:	d

O primeiro termo e o quarto chamam-se **extremos**; e o segundo e terceiro chamam-se **meios.**

O primeiro termo e o terceiro teem tambem o nome de **antecedentes**; e o segundo e o quarto teem o nome de **consequentes.**

Na proporção acima a e d são extremos; b e c são meios; a e c são antecedentes, e b e d são consequentes.

367. Tres quantidades estão tambem em proporção, quando a primeira está na mesma razão para a segunda, assim como a segunda está para a terceira. Os numeros 3, 6 e 12 estão em proporção, porque a razão que ha entre 3 e 6, ha tambem entre 6 e 12.

O termo do meio chama-se **meio proporcional** entre os outros dois. Assim, na proporção $a:b::b:c$, o termo b chama-se meio proporcional entre a e c, e o termo c chama-se **terceiro proporcional** a a e b, e a proporção chama-se **continua.**

Propriedades principaes das proporções

368. 1ª Propriedade. *Em toda a proporção o producto dos meios é igual ao producto dos extremos.*

Demonstração. Na proporção $a:b::c:d$, o quociente do primeiro termo dividido pelo segundo, deve ser igual ao quociente do terceiro dividido pelo quarto.
Multiplicando agora ambos os membros desta equação por bd para a inteirar, temos a (2ª) equação. Cancellando os factores b e d que são communs, temos a (3ª) equação que mostra o *producto dos meios igual ao producto dos extremos.*

$$a:b::c:d$$
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad (1^a)$$
$$\frac{abd}{b}=\frac{bcd}{d} \quad (2^a)$$
$$ad=bc \quad (3^a)$$

Podemos demonstrar esta propriedade arithmeticamente, isto é, por meio de algarismos. Dando ás letras a, b, c e d os valores proporcionaes de 3, 6, 5, e 10, vemos que o producto dos meios é igual ao producto dos extremos.

$$3:6::5:10$$
$$3\times10=6\times5$$
$$30=30.$$

369. Desde que o producto dos meios é igual ao producto dos extremos, segue-se o seguinte corollario :

Qualquer extremo é igual ao producto dos meios dividido pelo outro extremo ; e qualquer meio é igual ao producto dos extremos dividido pelo outro meio.

Dados pois tres termos de uma proporção, podemos facilmente achar o outro termo. Assim, na proporção $a:b::c:d$,

$$a=\frac{bc}{d},\quad b=\frac{ad}{c},\quad c=\frac{ad}{b}\quad \text{e}\quad d=\frac{bc}{a}.$$

Resolver os seguintes problemas :

1. Os primeiros tres termos de uma proporção são 12, 5 e 24; qual é o quarto termo? Resp. $\frac{5\times24}{12}=10.$
2. Os tres primeiros termos de uma proporção são $3ab$, $4a^2b$ e $9ab^2$; qual é o quarto termo ? Resp. $12a^2b^2$.
3. Os tres ultimos termos de uma proporção são $4ab^3$, $3a^2b^2$ e $2a^3b$; qual é o primeiro termo ? Resp. ?
4. Escrever $\frac{a}{m}=\frac{c}{d}$ em uma proporção. Resp. $a:m::c:d$.
5. Escrever $\frac{18}{3}=\frac{24}{4}$ em uma proporção. Resp. ?
6. Escrever $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ em uma proporção. » ?
7. Os tres primeiros termos de uma proporção são ab^2, $2a^2$ e $3ac$; qual é o quarto termo ? Resp. ?

370. 2ª Propriedade. *Se o producto de duas quantidades for igual ao producto de outras duas, as quatro quantidades formarão uma proporção, sendo os factores de um producto os meios, e os factores do outro producto os extremos.*

Demonstração. Sejam os dois productos $ad=bc$. Dividindo cada um dos productos por bd, temos a (1ª) equação. Cancellando os factores d e b que são communs, temos a (2ª) equação que se transforma na proporção $a:b::c:d$.
Se tomarmos dois productos numericos e iguaes, e escrevermos os factores de um producto como meios, e os do outro como extremos, teremos ahi uma proporção, como vemos ao lado.

$$ad=bc$$
$$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd} \quad (1^a)$$
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad (2^a)$$
$$a:b::c:d$$
$$5\times8=4\times10$$
$$5:4::10:8.$$

Formar proporções com os seguintes productos :

1. $2\times18=12\times3$. Resp. $2:12::3:18$.
2. $4\times25=5\times20$. » ?
3. $xm=yn$. » ?
4. $ax=by$. » ?
5. $ac=bd$. » ?

371. 3ª Propriedade. *Quando tres quantidades estão em proporção contínua, o producto dos extremos é igual ao quadrado do meio.*

Demonstração. Na primeira propriedade vimos que o producto dos meios é igual ao producto dos extremos. Então na proporção $a:b::b:c$, $bb=ac$, ou $b^2=ac$, e $b=\sqrt{ac}$.
Daqui concluimos que o *meio proporcional entre duas quantidades é igual á raiz quadrada do seu producto.*

Problema. Qual é o meio proporcional entre 4 e 9 ?

Solução. O producto das duas quantidades é $4\times9=36$ e a raiz quadrada de 36 é 6. O meio é pois 6, e a proporção é $4:6::6:9$.

1. Qual é o meio proporcional entre 9 e 16 ? Resp. 12.
2. Qual é o meio proporcional entre 16 e 25 ? » 20.
3. Qual é o meio proporcional entre 25 e 36 ? » 30.

372. 4ª Propriedade. *Se quatro quantidades são proporcionaes, ellas estarão em proporção tomadas alternadamente, isto é, a primeira estará para a terceira, assim como a segunda para a quarta.*

Demonstração. Na proporção $a:b::c:d$, temos a (1ª) equação. Multiplicando ambos os membros por b e depois cancellando os factores communs, temos a (2ª) equação.
Dividindo ambos os membros desta equação por c, e cancellando os factores communs, temos a (3ª) equação que, transformada em uma proporção, mostra que *o primeiro termo está para o terceiro, assim como o segundo está para o quarto.*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad (1^a)$$
$$a=\frac{bc}{d} \quad (2^a)$$
$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \quad (3^a)$$
$$a:c::b:d.$$

373. 5ª Propriedade. *Se quatro quantidades são proporcionaes, mesmo sendo invertidas, formarão proporção, isto é, a segunda estará para a primeira, assim como a quarta para a terceira.*

Demonstração. Já vimos na proporção $a:b::c:d$ que o producto dos meios é igual ao dos extremos, (1ª) equação. Dividindo ambos os membros por a, e cancellando os factores communs, temos a (2ª) equação. Dividindo ambos os membros desta equação por c, temos a (3ª) equação que transformada em uma proporção, mostra que *o segundo termo está para o primeiro, assim como o quarto está para o terceiro.*

$$bc=ad \quad (1^a)$$
$$\frac{bc}{a}=d \quad (2^a)$$
$$\frac{bc}{ac}=\frac{d}{c} \text{ ou } \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \quad (3^a)$$
$$b:a::d:c.$$

374. 6ª Propriedade. *Quando quatro quantidades são proporcionaes, a somma da primeira e da segunda está para a segunda, assim como a somma da terceira e da quarta está para a quarta.*

Demonstração. Vamos provar que se os quatro termos $a:b::c:d$ estão em proporção, então $a+b:b::c+d:d$ tambem o estarão.

Addicionando á (1ª) equação uma unidade ou 1, teremos a (2ª) equação que se modifica na (3ª) (n.° 153) Transformando agora os termos desta equação em uma proporção, vemos que *o primeiro termo mais o segundo estão para o segundo, assim como o terceiro mais o quarto estão para o quarto.*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad (1^a)$$
$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \quad (2^a)$$
$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \quad (3^a)$$
$$a+b:b::c+d:d.$$

375. 7ª Propriedade. *Quando quatro quantidades são proporcionaes, a differença entre a primeira e a segunda está para a segunda, assim como a differença entre a terceira e a quarta está para a quarta.*

Demonstração. Da proporção $a:b::c:d$, tiramos a (1ª) equação. Subtrahindo 1 em cada membro desta equação, temos a (2ª) equação que se modifica na (3ª) (n.° 161). Transformando esta equação em uma proporção, vemos que *o primeiro termo menos o segundo está para o segundo, assim como o terceiro menos o quarto está para o quarto.*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad (1^a)$$
$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1 \quad (2^a)$$
$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \quad (3^a)$$
$$a-b:b::c-d:d.$$

376. 8ª Propriedade. *Quando quatro quantidades são proporcionaes, se a primeira e a terceira, ou a segunda e a quarta, ou todas ellas forem multiplicadas ou divididas pela mesma quantidade, as quantidades resultantes continuarão em proporção.*

Demonstração. Da proporção $a:b::c:d$, deduzimos a (1ª) equação. Multiplicando ambos os membros por m, temos a (2ª) equação. Dividindo ambos os membros por n (n.° 165), temos a (3ª). Transformada esta equação em uma proporção, vemos que *o primeiro termo e o terceiro estão multiplicados por m; e o segundo e quarto por n, estando na segunda proporção os mesmos termos divididos pelas mesmas quantidades.*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad (1^a)$$
$$\frac{ma}{b}=\frac{mc}{d} \quad (2^a)$$
$$\frac{ma}{nb}=\frac{mc}{nd} \quad (3^a)$$
$$ma:nb::mc:nd.$$
$$\frac{a}{m}:\frac{b}{n}::\frac{c}{m}:\frac{d}{n}.$$

377. 9ª Propriedade. *Se os termos correspondentes de duas ou mais proporções forem multiplicados entre si, os productos serão proporcionaes.*

Demonstração. Tomando as duas proporções (1ª) e (2ª), e multiplicando os seus termos correspondentes, temos a proporção (3ª)

Transformando as duas primeiras proporções em suas respectivas equações temos (I) e (II).

Multiplicando entre si os termos destas equações, temos a (III) equação.

Transformando esta equação em uma proporção vemos que *os diversos termos são o producto das duas proporções.*

$$a:b::c:d \quad (1^a)$$
$$e:f::g:h \quad (2^a)$$
$$ae:bf::cg:dh \quad (3^a)$$
$$\text{(I)}\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad \text{(II)}\ \frac{e}{f}=\frac{g}{h}$$
$$\text{(III)}\ \frac{a}{b}\times\frac{e}{f}=\frac{c}{d}\times\frac{g}{h} \text{ ou } \frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh}$$
$$ae:bf::cg:dh.$$

378. 10ª Propriedade. *Quando quatro quantidades são proporcionaes, suas potencias e raizes estarão tambem em proporção.*

Demonstração. Na proporção $a:b::c:d$, temos a equação (1ª). Elevando cada uma destas quantidades á potencia n (lettra que representa aqui o numero do expoente de uma quantidade), temos a (2ª) equação, a qual transformada em uma proporção, mostra *os quatro termos elevados á potencia n, e em proporção.*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad (1^a)$$
$$\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n} \quad (2^a)$$
$$a^n:b^n::c^n:d^n.$$

Nota. Os alumnos devem verificar numericamente cada uma destas pro priedades, como fizemos com a primeira e segunda.

Resolver as seguintes proporções :

1. Achar o valor de x na proporção $x+4:x+2::x+8:x+5$. Resp. $x=4$.
2. Achar o valor de x na proporção $x+4:2x+8::2x-1:3x+2$. Resp. $x=4$.
3. Achar o valor de x na proporção $3x+2:x+7::9x-2:5x+8$. Resp. $x=2$ ou $2\frac{1}{2}$.
4. Se 3, x e 1083 formam uma proporção contínua, qual é o valor de x? Resp. 57.
5. Se 9, x e 49 formam uma proporção contínua, qual é o valor de x? Resp. ?

PROGRESSÕES

379. Progressão é uma serie de numeros que crescem ou decrescem em uma certa ordem ou razão.

Ha duas sortes de progressões denominadas :

1ª Progressão arithmetica ou por differença ;
2ª Progressão geometrica ou por quociente.

Progressão arithmetica

380. A progressão arithmetica é uma serie de numeros que crescem ou decrescem com uma differença commum a todos; isto é, cada numero é formado do seu antecedente com o accrescimo ou diminuição da differença commum.

381. Se os termos vão crescendo do primeiro para o ultimo, a progressão chama-se **crescente,** mas se vão diminuindo, chama-se **decrescente.**

Em uma serie crescente, sendo a o primeiro termo com o valor de 20, e d a differença commum com o valor de 3, temos

a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$, $a+5d$, etc.
20, 23, 26, 29, 32, 35, etc.

Se a serie for decrescente, temos

a, $a-d$, $a-2d$, $a-3d$, $a-4d$, $a-5d$, etc.
20, 17, 14, 11, 8, 5, etc.

382. Os numeros que formam uma serie, chamam-se **termos,** o primeiro e o ultimo chamam-se **extremos,** e os intermediarios chamam-se **meios,** e a differença que ha entre elles, chama-se **differença commum.** Assim na série

5, 9, 13, 17, 21, 25.

5 e 25 são os extremos; 9, 13, 17 e 21 são os meios; 4 é a differença commum, e 6 é o numero de termos.

383. Em cada progressão arithmetica temos de considerar cinco quantidades que são:

1ª	*O primeiro termo......*	a	4ª	*O numero de termos....*	n
2ª	*O ultimo termo........*	u	5ª	*A somma de todos os termos..............*	s
3ª	*A differença commum..*	d			

Ha tal relação entre estas cinco quantidades que, sendo conhecidas somente tres, podemos facilmente achar as outras duas.

Conhecendo o primeiro termo, a differença commum e o numero de termos, achar o ultimo termo

384. Dando-se o primeiro termo a, a differença commum d e o numero de termos n, qual é o ultimo termo u?

Solução. Em uma serie crescente cada termo se fórma do seu antecedente junto com a differença commum, como

a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$, etc.

Nesta serie vemos que, em cada termo, o coefficiente de d é 1 menos do que o numero da ordem desse termo na serie; pois no segundo termo o coefficiente de d

é 1 subentendido; no terceiro termo é 2; no quarto termo é 3, etc. Então o ultimo deve ser igual a a mais a differença commum, multiplicada pelo numero de termos menos 1.

Fórmula: $u=a+d(n-1)$

Esta fórmula, traduzida em linguagem commum, dá a seguinte regra:

Regra. *O ultimo termo é igual ao primeiro termo mais o producto da differença commum multiplicada pelo numero de termos menos 1.*

Se a serie for decrescente, multiplica-se a differença commum pelo numero de termos menos 1, e o producto subtrahe-se do primeiro termo.

Resolver os seguintes problemas:

1. O primeiro termo de uma serie crescente é 3, e a differença commum é 2; qual é o quarto termo? Resp. $u=3+2(4-1)=9$.
2. Achar o sexto termo de uma serie decrescente, sendo 30 o primeiro termo, e 2 a differença commum. Resp. $30-2(6-1)=20$.
3. Uma serie crescente, sendo 11 o primeiro termo, e 6 a differença commum, qual é o decimo segundo termo? Resp. 77.
4. Qual é o decimo quinto termo da serie 1, 6, 11, 16, 21, etc.? Resp. 71.
5. Qual é o centesimo termo da serie 1, 7, 13, 19, 26, etc.? Resp. 595.
6. Qual é o 25° termo da serie x, $3x$, $5x$, $7x$, etc.? Resp. $49x$.

Achar a somma de todos os termos

385. Dando-se o primeiro termo a, a differença commum d e o numero de termos n, achar a somma de todos os termos representada por s.

Solução. Tomando uma serie de 5 termos na ordem crescente, e a mesma série na ordem decrescente, começando com o ultimo termo (u), e sommando as duas series, temos

$$s=a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)$$
$$s=u+(u-d)+u-2d)+(u-3d)+(u-4d)$$
$$2s=a+u+(a+u)+(a+u)+a+u)+(a+u)$$

ou $2s=(a+u)$ tomado tantas vezes quantos são os termos da serie. Ora como o numero de termos é representado pela lettra n, segue-se que $2s=(a+u)n$, e $s=(a+u)n$ dividido por 2.

Fórmula: $s=\left(\dfrac{a+u}{2}\right)n$

Esta fórmula, traduzida em linguagem commum, dá a seguinte regra:

Regra. *A somma de todos os termos é igual á metade da somma do primeiro e do ultimo multiplicada pelo numero de termos.*

1. Achar a somma de todos os termos da serie 1, 2, 3, 4, 5, etc. até 25.

Solução. Somma $= \left(\frac{1+25}{2}\right) \times 25 = 325.$

2. Sendo o primeiro termo de uma serie 2, o ultimo termo 50, e o numero de termos 17, qual é a somma de todos os termos? Resp. 442.

3. O primeiro termo é 10, o ultimo é 20, e o numero de termos é 6; qual é a somma da serie? Resp. 90.

4. O primeiro termo é $\frac{1}{2}$, o ultimo termo é 30, e o numero de termos é 50; qual é a somma da serie inteira? Resp. ?

5. Dar a somma da serie 2, 5, 8, 11, até o termo 20°. Resp. ?

386. As duas fórmulas que acabamos de expor, chamam-se **fundamentaes**, porque nos offerecem duas equações que resolvem este problema geral:

« Conhecidas tres das cinco quantidades a, d, n, u, e s, que entram em uma progressão arithmetica, determinar as outras duas. »

(1ª Equação fundamental)	(2ª Equação fundamental)
$u=a+d(n-1)$	$s=\left(\frac{a+u}{2}\right)n$

Para acharmos o valor de a, que é o primeiro termo da serie, quando são conhecidos o ultimo termo, o numero de termos e differença commum, transporemos na 1ª equação a lettra a para o primeiro membro, e a lettra u para o segundo, como se vê na equação ao lado.

$$a=u-d(n-1)$$

387. Para acharmos o valor de d, que é a differença commum, conhecendo u, a e n transporemos na 1ª equação a lettra d para o primeiro membro e a lettra u para o segundo, como se vê na fórmula ao lado.

$$d(n-1)=1-a$$

$$d=\frac{u-a}{n-1}$$

388. Para acharmos o valor de n, que é o numero dos termos, conhecendo s, a e u, faremos na 2ª equação a transposição que vemos ao lado, (Vêde n.° **184**).

$$2s=n(a+u)$$

$$n(a+u)=2s$$

$$n=\frac{2s}{a+u}$$

Deste modo podemos achar facilmente qualquer das cinco quantidades de uma progressão, sendo tres dellas conhecidas.

Inserir qualquer numero de meios arithmeticos entre dois termos dados

389. Conforme vimos na secção antecedente, a fórmula para acharmos a differença commum dos termos é a que está ao lado, e que quer dizer: *Em qualquer progressão arithmetica a differença commum é igual á differença dos extremos dividida pelo numero de termos menos 1.*

$$d=\frac{u-a}{n-1}$$

Se quizermos, por exemplo, inserir cinco meios entre 3 e 15, temos de achar primeiro a differença commum dessa serie. Ora os extremos são 3 e 15; o numero de termos inseridos com os dois extremos são $5+2=7$, então a differença commum é 2, como vemos na operação ao lado; e a serie é

$$\frac{15-3}{7-1}=2$$

3, 5, 7, 9, 11, 13, **15**.

390. E' evidente que, se inserirmos o mesmo numero de meios entre termos consecutivos de uma progressão arithmetica, o resultado formará uma nova progressão. Assim, se inserirmos tres termos entre os termos consecutivos da progressão 1, 9, 17, etc., a nova serie será **1**, 3, 5, 7, **9**, 11, 13, 15, **17**, e assim por diante.

Resolver os segnintes problemas:

1. Inserir tres termos entre 5 e 7.

Solução. $\frac{7-5}{5-1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Sendo a razão $\frac{1}{2}$, a serie é 5, $5\frac{1}{2}$, 6, $6\frac{1}{2}$, 7.

2. Inserir 5 meios arithmeticos entre 14 e 16. Resp. $14\frac{1}{3}$, $14\frac{2}{3}$, 15, $15\frac{1}{3}$, $15\frac{2}{3}$.

3. Achar 9 meios arithmeticos entre 2 e 32. Resp. 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29.

4. Achar 6 meios arithmeticos entre 1 e 50. Resp. ?

5. O primeiro termo de uma progressão crescente é 5; o ultimo termo é 50, e a somma de todos os termos é 275; qual é o numero de termos? Resp. 10.

6. O primeiro termo de uma progressão crescente é 4; o ultimo termo é 32, e o numero de termos é 8; qual é a differença commum? Resp. 4.

7. O ultimo termo de uma progressão crescente é 50; a differença commum é 5, e o numero de termos é 10; qual é o primeiro termo? Resp. 5.

8. Cem pedras estando collocadas em linha recta com a distancia de 2 metros uma da outra, quanto teria de andar a pessoa que

tivesse de recolher todas as pedras uma a uma, em um cesto posto a 2 metros de distancia da primeira pedra? Resp. 20200^m.

Nota. A pessoa que recolher as pedras tem de andar 2 vezes a distancia entre o cesto e a pedra: uma quando vai buscar a pedra, e a outra quando a traz, e por isso a differença commum é 2 vezes 2 metros = 4 metros, e por isso o primeiro termo é 4 metros.

9. Um estudante comprou 7 objectos, cujos preços formavam uma progressão arithmetica. O preço do objecto mais barato foi $500, e o preço do mais caro foi 2$300. Achar os preços dos outros objectos. Resp. $800, 1$100, 1$400, 1$700 e 2$000.

10. Se o primeiro termo de uma progressão crescente é 5, a differença commum é 3, e o numero de termos é 15, qual é o ultimo termo? Resp. ?

11. Em uma serie crescente, 11 é o primeiro termo, 6 é a differença commum; qual é pois o vigesimo termo da progressão? Resp. 125.

12. Achar a somma da serie 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., até 1000 termos. Resp. 500500.

Progressão geometrica

391. Progressão geometrica é uma serie de numeros, cada um dos quaes é um certo numero de vezes maior ou menor do que o seu antecedente.

Serie crescente: 1, 3, 9, 27, 81, 243, etc.
Serie decrescente: 96, 48, 24, 12, 6, 3, etc.

392. O numero de vezes que cada termo da progressão geometrica vai crescendo ou diminuindo chama-se **razão commum.**

A razão commum póde ser inteira ou fraccionaria. Quando a razão é uma fracção, a serie é decrescente, porque a multiplicação de um inteiro por uma fracção dá sempre um producto inferior ao multiplicando. Assim na serie crescente acima, a razão commum é 3, e na decrescente é $\frac{1}{2}$.

393. Em cada progressão geometrica, cada termo é formado pelo seu antecedente multiplicado pela razão.

394. Em uma serie geometrica, temos de considerar cinco quantidades que são:

1ª	*O primeiro termo*	a	4ª	*O numero de termos*	n
2ª	*O ultimo termo*	u	5ª	*A somma de todos os termos*	s
3ª	*A razão commum*	r			

Ha tal relação entre estas 5 quantidades que, conhecidas 3 dellas, podemos facilmente achar as outras duas.

Achar qualquer termo de uma progressão geometrica

395. Dando-se o primeiro termo representado por a, o numero de termos representado por n, e a razão commum representada por r, achar o ultimo termo representado por u.

Solução. Sendo a o primeiro termo, e cada termo da progressão formado do seu antecedente multiplicado pela razão, segue-se que a serie deve ser

$$a, \; ar, \; ar^2, \; ar^3, \; ar^4 \ldots\ldots \; ar^{n-1}$$

Examinando o expoente de r, vemos que no segundo termo é 1 subtendido, no terceiro é 2, no quarto é 3, no quinto é 4, isto é, 1 menos que a ordem do termo, de sorte que no ultimo termo, o expoente de r deve ser 1 menos que o numero de termos, isto é, ar^{n-1}. Daqui temos a

Fórmula: $u = ar^{n-1}$

Esta fórmula traduzida em linguagem commum dá a seguinte regra:

Regra. *O ultimo termo de uma progressão geometrica é igual ao producto do primeiro termo multiplicado pela potencia da razão cujo expoente seja 1 menos do que o numero de termos.*

1. Achar o sexto termo de uma progressão geometrica, em que o primeiro termo é 3, e a razão commum é 2.

Solução. $u = 3 \times 2^5 = 3 \times 32 = 96$.

2. O primeiro termo de uma progressão geometrica é 4, e a razão commum é 3; qual é o setimo termo? Resp. 2916.

3. O primeiro termo é 5, a razão commum é 4; qual é o termo oitavo? Resp. 81920.

4. O primeiro termo é 7, a razão commum é 2; qual é o termo decimo? Resp. 3584.

5. Se um negociante, começando com 5 contos, dobrasse o seu capital cada cinco annos, quanto teria elle no fim de vinte annos? Resp. 80 contos.

Achar a somma de todos os termos de uma progressão geometrica

396. Dando-se o primeiro termo a, a razão commum r, e o numero de termos n, achar a somma dos termos s.

Solução analytica. Se multiplicarmos qualquer serie geometrica pela sua razão (r), o resultado será uma nova serie na qual cada termo, excepto o ultimo, terá um termo correspondente na primeira serie. Observemos estas duas series

Serie $s = a + ar + ar^2 + ar^3 \ldots\ldots \; ar^{n-1}$.
Serie $\times \, r = rs = \quad ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 \ldots\ldots \; ar^n$

Notamos aqui que os termos das duas series são identicos, excepto o primeiro termo da primeira serie, e o ultimo termo da segunda. Se agora subtrahirmos a primeira serie da outra que foi multiplicada por r, todos os termos do meio desapparecerão, restando sómente os dois extremos, isto é, $ar^n - a$; então temos

$$rs - s = ar^n - a$$
$$s(r-1) = ar^n - a$$
$$\text{ou } s = \frac{ar^n - a}{r-1}.$$

Já vimos (n.º 395) que $u = ar^{n-1}$; multiplicando ambos os termos desta igualdade por r, temos $ur = ar^n$. Substituindo no valor de s a quantidade ar^n por ur, temos a

Fórmula: $s = \dfrac{ur - a}{r - 1}$

Esta fórmula, traduzida em linguagem commum, dá a seguinte regra:

Regra. *Para se achar a somma de uma progressão geometrica, multiplica-se o ultimo termo pela razão, do producto subtrahe-se o primeiro termo, e o resto divide-se pela razão menos 1.*

1. Achar a somma de uma progressão geometrica cujo primeiro termo é 4, a razão é 3, e o ultimo termo 2916.

Solução. $\dfrac{(2916 \times 3) - 4}{3 - 1} = 4372.$

2. Achar a razão de uma progressão geometrica, na qual o primeiro termo é 7, a razão é 2, e o ultimo termo é 3584. Resp. 7161.

3. Sendo o primeiro termo de uma progressão geometrica 5, a razão 4, e o ultimo termo 81920, qual é a somma da progressão? Resp. 109225.

4. Achar a somma de 7 termos da progressão 1, 2, 4, 8, etc. Resp. 127.

5. Achar a somma de 10 termos da progressão 4, 12, 36, etc. Resp. 118096.

6. Achar a somma de 9 termos da progressão 5, 20, 80, etc. Resp. 436905.

Achar um meio geometrico entre dois numeros

397. Para acharmos um meio geometrico entre dois numeros examinemos a progressão de tres quantidades.

$$a, \quad ar, \quad ar^2.$$

Multiplicando os dois extremos, vemos que o producto é $a \times ar^2 = a^2r^2$, e que o quadrado do meio é $(ar)^2 = a^2r^2$, isto é, o producto dos extremos é igual ao quadrado do meio.

Daqui temos a seguinte regra:

Regra. *Para se achar um meio geometrico entre dois numeros, multiplicam-se esses numeros, e extrahe-se a raiz quadrada do producto.*

1. Achar o meio geometrico entre 4 e 9.

Solução. $\sqrt{4 \times 9} = 6.$

2. Achar o meio geometrico entre 4 e 25. Resp. ?
3. Achar o meio geometrico entre 9 e 16. » ?
4. Achar o meio geometrico entre $4a$ e $49a$. » $14a$.
5. Achar o meio geometrico entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{4}$. » $\frac{1}{2}$.

Problemas variados para o exame

1. Reduzir $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2}$ á sua expressão mais simples. Resp. $\dfrac{a-b}{a+b}$.

2. Achar o valor de x na equação $x + \frac{x}{3} - \frac{2x}{5} = \frac{3x}{7} + 53$. Resp. $x = 105$.

3. Resolver a equação $2x + \dfrac{ax - b}{3} = x - a$. Resp. $x = \dfrac{b - 3a}{a + 3}$.

4. Ha dois numeros cuja somma é 37, e se tres vezes o menor for subtrahido de quatro vezes o maior, e esta differença for dividida por 6, o quociente será 6. Quaes são os numeros? Resp. 16 e 21.

5. Achar os valores de x e y nas seguintes equações simultaneas: $2x + 7y = 65$ e $6x - 2y = 34$. Resp. $x = 8$, $y = 7$.

6. Achar os valores de x, y e z no seguinte systema de equações: $2x + 6y + 5z = 93$, $4x + 3y + 8z = 95$ e $5x + 4y + 9z = 116$. Resp. $x = 7$, $y = 9$, $z = 5$.

7. Elevar $m - n$ á quinta potencia por meio do binomio de Newton. Resp. $m^5 - 5m^4n + 10m^3n^2 - 10m^2n^3 + 5mn^4 - n^5$.

8. Qual é a raiz quadrada de 178929? Resp. 423.

9. Reduzir o radical $\sqrt{486a^2b^4x^5}$ á sua fórma mais simples. Resp. $9ab^2x^2\sqrt{6x}$.

10. Achar o valor de x na equação $x^2+6x=27$.
Resp. $x=+3$ ou -9.

11. Resolver a equação $x+\sqrt{x^2-3x+60}=12$. Resp. $x=4$.

12. Formar uma equação completa do segundo grau, cujas raizes sejam 5 e 6. Resp. $x^2-11x=-30$.

13. Dividir o numero 33 em duas partes de sorte que o seu producto seja 162. Resp. 27 e 6.

14. Achar o valor de x na proporção $x+4:x+2::x+8:x+5$.
Resp. $x=4$.

15. Achar o oitavo termo de uma progressão geometrica cujo primeiro termo seja 5, e a razão commum 4. Resp. 81920.

16. Decompôr a expressão trinomia $x^2+6x-27$ em dois factores binomios. Resp. $(x-3)(x+9)$.

17. A somma dos quadrados de dois numeros é 260, e a differença desses quadrados é 132; quaes são os numeros?
Resp. 8 e 14.

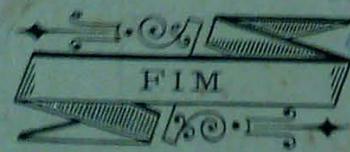
18. Um negociante comprou 3 peças de seda, que sommavam 111 metros. A segunda peça tinha 11 metros mais do que a primeira, e a terceira tinha 17 metros mais do que a segunda; quantos metros tinha cada uma? Resp. 1ª=24, 2ª=35, 3ª=52.

19. Achar dois numeros cuja somma seja 16, e a somma dos seus quadrados seja 130. Resp. 7 e 9.

20. Um fazendeiro empregou na colheita do café 5 homens e 4 rapazes; no fim do primeiro dia de trabalho, pagou lhes o jornal que importou em 10$500; no segundo dia empregou 8 homens e 6 rapazes, e pagou-lhes na mesma razão, importando o salario em 16$500; qual foi o jornal de cada homem, e de cada rapaz?
Homem 1$500, rapaz $750.

21. Na Noruega foi pescado um bacalhau cujo rabo pesava 9 kilos; a cabeça pesava tanto como o rabo e metade do corpo, e o corpo pesava tanto como o rabo e a cabeça; quanto pesava o peixe?
Resp. 72 kilos.

22. Simplificar a expressão $5a^2+3mn-(2a^2-mn-b)$.
Resp. $3a^2+4mn+b$.

23. Quando Dante viu a Beatriz pela primeira vez, tinha 8 annos mais do que ella, e ella tinha $\frac{5}{7}$ da idade delle; quaes eram as suas idades?
Resp. ?

INDICE

	PAGS.
Explicações dos signaes algebricos	6
Exercicios sobre os symbolos algebricos	8
Definições de alguns termos algebricos	9
Exercicios sobre os symbolos das potencias	11
Expressões algebricas	12
Modo de enunciar as expressões algebricas	14
Addição algebrica	15
Primeiro caso da addição	15
Segundo caso da addição	16
Terceiro caso da addição	18
Subtracção algebrica	20
Primeiro caso da subtracção	20
Segundo caso da subtracção	21
Terceiro caso da subtracção	21
Quarto caso da subtracção	22
Applicação do parenthesis na addição e subtracção	24
Multiplicação algebrica	26
Primeiro caso da multiplicação	27
Segundo caso da multiplicação	30
Terceiro caso da multiplicação	30
Uso do parenthesis na multiplicação	31
Divisão algebrica	33
Primeiro caso da divisão	33
Segundo caso da divisão	36
Terceiro caso da divisão	38
Theoremas	40
Divisores e multiplos	44
Decomposição das quantidades algebricas	46
Decomposição dos polynomios	48
Maximo divisor commum	51
Achar o maximo divisor commum	52
Maximo divisor commum dos polynomios	53
Minimo multiplo commum	54

	PAGS.
Fracções algebricas	56
Theoremas relativos ás fracções	58
Reduzir fracções algebricas á expressão mais simples	60
Transformar fracções algebricas em quantidades inteiras ou mixtas	61
Transformar uma quantidade mixta em fórma de uma fracção	62
Reduzir fracções a um denominador commum	64
Achar o minimo denominador commum	66
Addição de fracções	67
Subtracção de fracções	68
Multiplicação de fracções	70
Divisão de fracções	73
Equações do primeiro grau	76
Transformação das equações	78
Inteirar uma equação	78
Transpor os termos de uma equação	79
Reducção dos termos semelhantes	80
Regra geral para a solução	81
Problemas	83
Equações simultaneas com duas incognitas	91
Eliminação pela reducção ao mesmo coefficiente	92
Eliminação por comparação	94
Eliminação por substituição	94
Problemas com duas incognitas	95
Equações simultaneas contendo mais de duas incognitas	98
Problemas indeterminados	100
Demonstrações algebricas	103
Generalização	107
Fórmas da solução	112
Solução positiva	112
Solução negativa	112
Solução infinita	114
Solução zero	115
Solução indeterminada	115
Solução absurda	117

PAGS.

Discussão dos problemas.. 118
Desigualdade................. 122
Formação das potencias... 126
Elevação de um monomio a qualquer potencia................ 127
Elevação de um polynomio a qualquer potencia............ 128
Elevar uma fracção a qualquer potencia...................... 128
Binomio de Newton............ 129
Outros modos de formar um quadrado........................ 133
Extracção da raiz quadrada 135
Modo pratico da extracção...... 138
Extracção da raiz quadrada das fracções...................... 139
Raiz quadrada approximada.... 140
Extracção da raiz quadrada dos monomios.................... 140
Extracção da raiz quadrada dos polynomios.................. 142
Radicaes do segundo grau...... 144
Reducção de um radical á sua fórma mais simples........... 144
Addição dos radicaes do segundo grau........................ 146
Subtracção dos radicaes do segundo grau.................. 147
Multiplicação dos radicaes do segundo grau................. 147
Divisão dos radicaes do segundo grau........................ 148
Solução das equações que conteem radicaes................ 150
Equações do segundo grau. 152
Solução das equações incompletas do segundo grau......... 153
Problemas que produzem equações incompletas do segundo grau........................ 155

PAGS.

Solução das equações completas do segundo grau............ 155
Achar as raizes das equações completas.................... 157
Problemas que produzem equações completas do segundo grau.......................... 158
Fórmas da equação completa... 160
Achar as raizes por meio da fórma generalizada........... 161
Propriedade das equações completas........................ 162
Equações do segundo grau contendo duas quantidades desconhecidas..................... 164
Problemas contendo duas quantidades desconhecidas........ 165
Equações biquadradas..... 166
Razão e Proporção........ 167
Proporções..................... 169
Propriedades principaes das proporções...................... 170
Progressões................ 173
Progressão arithmetica......... 174
Achar o ultimo termo da progressão..................... 174
Achar a somma de todos os termos da progressão........... 175
Inserir qualquer numero de meios entre dois termos dados. 177
Progressão geometrica......... 178
Achar qualquer termo de uma progressão geometrica........ 179
Achar a somma de todos os termos........................ 179
Achar o meio geometrico entre dois numeros................ 180
Problemas para o exame.. 181

OBSERVAÇÃO. A presente edição da nossa Algebra sahiu tão ampliada e desenvolvida com materia nova, que alterou completamente não só a paginação, mas tambem a numeração das secções em que ella estava dividida; e deste modo ficou inutilizada a Chave composta para as edições passadas. Fomos, portanto, obrigados, a preparar e publicar uma Nova Chave para a 5ª EDIÇÃO, e que servirá igualmente para as edições posteriores.

A Nova Chave para a 5ª edição já se acha á venda nas diversas livrarias.

Serie de compendios para o estudo de mathematicas

PELO

Professor Antonio Trajano

Arithmetica Primaria para meninos e meninas que começam o estudo de Arithmetica nas escolas primarias, contendo todo o ensino exposto em lições perfeitamente graduadas, e acompanhada de numerosos exercicios, problemas e figuras para tornar o estudo da arithmetica mais attractivo ás crianças, 4[illegible] edi[illegible] $500

Arithmetica Elementar Illustrada para as classes mais adiantadas das escolas, contendo toda a materia da Arithmetica que deve ser ensinada nas aulas primarias. Obra premiada pelo Jury da Exposição Pedagogica do Rio de Janeiro, e adoptada pela Instrucção Publica, em varios Estados da Republica, 47ª edição em [illegible] stereotypia, cartonada . . [illegible]

Arithmetica Pro[illegible] [illegible] curso comp[illegible] theorico e pratico de Arithmetica para [illegible] e superior, contendo [illegible] os esclarecimentos [illegible] importante ra[illegible] o da sciencia, obra adoptada em muitas escolas normaes, [illegible] e outros estabelecim[illegible] educação superior, 29ª [illegible] cartonada . . . . 4$000

Chave da Arithmetica Progressiva, 3ª edição [illegible] ampliada . . . . 1$000

[illegible]ebra Elementar, contendo o curso theorico e pratic[illegible] importante ramo das mathematicas, **quinta edição**, [illegible] desenvolvida [illegible] que todas as edições pr[illegible] devidamente ampliada com materia nova, de summa importancia, cartonada. . . . . 5$000

Nova Chave da Algebra, preparada para a quinta edição contendo a solução de todos os problemas e difficuldades desta nova edição da Algebra. . . . . 2$000

Algebra e Chave, em um só volume, para uso dos professores, 5ª edição, cartonada com elegancia. . . . . . 7$000